

# IMPETOM I

*Proyecto de fin de carrera  
Implementación de un tomógrafo por impedancia  
eléctrica*

*Núcleo de ingeniería biomédica  
Universidad de la República  
Agosto 2000 – Junio 2002*

## **Estudiantes**

**Hartmam, Raúl  
Lobo, Jorge  
Ruétalo, Mateo**

## **Coordinador**

**Ing. Franco Símini**

## INDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>12</b>
<b>1 PROPIEDADES ELÉCTRICAS DE LOS TEJIDOS</b>	<b>13</b>
1.1 MODELO DE LA IMPEDANCIA EN LOS TEJIDOS	13
1.2 LA IMPEDANCIA EN TEJIDOS NORMALES	15
1.3 ANISOTROPÍA EN LOS TEJIDOS	15
1.4 VARIACIONES DE IMPEDANCIAS	16
1.5 IMPEDANCIA DE LA PIEL	16
<b>2 LA TOMOGRAFÍA POR IMPEDANCIA ELÉCTRICA</b>	<b>17</b>
2.1 INTRODUCCIÓN	17
2.2 IMÁGENES DINÁMICAS Y ESTÁTICAS	19
2.3 SIMPLIFICACIÓN DEL PROBLEMA	19
2.4 UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN	19
2.5 DECISIONES DE PROYECTO DE IMPETOM-I	20
<b>3 RECONSTRUCCIÓN TOMOGRÁFICA DE IMÁGENES</b>	<b>21</b>
3.1 ANÁLISIS TEÓRICO DEL PROBLEMA	21
3.1.1 <i>Ecuaciones del sistema</i>	21
3.1.2 <i>El Problema Directo</i>	22
3.2 ESTRATEGIAS DE MEDIDAS	23
3.2.1 <i>Método de las corrientes óptimas o método bipolar</i>	23
3.2.2 <i>Métodos Tetrapolares</i>	25
3.3 MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES	27
3.4 DECISIONES DE PROYECTO DE IMPETOM-I	27
<b>4 MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN ITERATIVOS</b>	<b>29</b>
4.1 MÉTODO DE LAS PERTURBACIONES	29
4.2 MÉTODO DEL DOBLE CONDICIONAMIENTO	30
4.3 MÉTODO NEWTON-RAPHSON MODIFICADO	31
<b>5 MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN DE UN SOLO PASO</b>	<b>33</b>
5.1 MÉTODO NEWTON DE UN SOLO PASO: NOSER	33
5.2 MÉTODO CAPA A CAPA	33
5.3 MÉTODO DE LA MATRIZ DE SENSIBILIDAD	35
5.3.1 <i>La relación de Sensibilidad</i>	35
5.3.2 <i>La Matriz de Sensibilidad Linealizada</i>	38
5.3.3 <i>Formulación de la Matriz de Sensibilidad Normalizada</i>	38
5.4 MÉTODO DE RETROPROYECCIÓN	40
5.4.1 <i>Introducción</i>	40
5.4.2 <i>Distribución del potencial dentro de un medio resistivo isotrópico</i>	40
5.4.3 <i>Transformación de coordenadas</i>	42

5.4.4	<i>Fundamentación de la retroproyección</i>	45
<b>6</b>	<b>REGULARIZACIÓN</b>	<b>48</b>
6.1	NECESIDAD DE LA REGULARIZACIÓN	48
6.2	MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN	50
6.3	LA DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES	50
6.4	REGULARIZACIÓN DE TIKHONOV	53
6.4.1	<i>Desarrollo del método</i>	53
6.4.2	<i>El criterio de regularización de la curva L (L-curve criterion)</i>	55
6.5	REGULARIZACIÓN POR UNIFORMIZACIÓN DE LA VARIANZA	57
6.5.1	<i>Ecualización de la varianza</i>	58
6.5.2	<i>Elección del parámetro c</i>	60
6.6	PRINCIPIO DE PICARD	61
6.6.1	<i>La condición discreta de Picard</i>	61
<b>7</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE LA MATRIZ DE SENSIBILIDAD</b>	<b>64</b>
7.1	INTRODUCCIÓN	64
7.2	DEFINICIÓN DE LA GRILLA	64
7.2.1	<i>Estructuras de grilla</i>	66
7.3	CÁLCULO DEL GRADIENTE DE VOLTAJE EN CADA ELEMENTO	66
7.3.1	<i>Cálculo de los potenciales en los elementos</i>	66
7.3.2	<i>Construcción de la Matriz de Sensibilidad</i>	71
7.4	INVERSIÓN DE LA MATRIZ DE SENSIBILIDAD NORMALIZADA	75
7.4.1	<i>Matriz Pseudo-Inversa</i>	76
7.4.2	<i>Regularización</i>	78
7.5	OBTENCIÓN DE DATOS DE PRUEBA	82
<b>8</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE RETROPROYECCIÓN</b>	<b>83</b>
8.1	INTRODUCCIÓN	83
8.2	EL MÉTODO DE RETROPROYECCIÓN	83
8.3	DEFINICIÓN DE LA GRILLA	88
8.4	CÁLCULO DEL POTENCIAL EN LOS ELEMENTOS DE LA GRILLA	88
8.5	DETERMINACIÓN DE LAS MÁSCARAS	89
8.6	FILTRADO	89
<b>9</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN DE NEWTON RAPHSON</b>	<b>94</b>
9.1	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO	94
9.2	MODELADO DEL ELECTRODO	94
9.2.1	<i>Modelo continuo</i>	95
9.2.2	<i>Modelo Gap</i>	95
9.2.3	<i>Modelo Shunt</i>	95
9.2.4	<i>Modelo completo del Electrodo</i>	96
9.3	FORMULACIÓN VARIACIONAL	97
9.3.1	<i>Cálculo de la matriz del sistema</i>	99
9.3.2	<i>Cálculo del término independiente I</i>	100
9.3.3	<i>Elección del potencial de referencia</i>	101

## IMPETOM I

9.3.4	<i>Resolución de <math>A\mathbf{a} = I</math></i>	101
9.3.5	<i>Resolución del problema inverso</i>	101
9.4	CÁLCULO DEL JACOBIANO	102
9.4.1	<i>Método estándar</i>	103
9.4.2	<i>Método de la sensibilidad</i>	103
9.5	MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN	104
9.5.1	<i>Regularización con operador derivada</i>	105
9.5.2	<i>Construcción de la matriz <math>L</math></i>	106
9.5.3	<i>Utilización del Método de Levenberg- Marquardt (Tikhonov)</i>	107
9.6	RECONSTRUCCIONES	107
<b>10</b>	<b>EVALUACIÓN DE LOS MÉTODOS DE RECONSTRUCCIÓN MEDIANTE CONJUNTOS DE DATOS ESTÁNDARES</b>	<b>111</b>
10.1	SIMULACIÓN DE MEDIDAS	111
10.2	ESTUDIO DE LINEALIDAD	112
10.2.1	<i>Conclusiones</i>	115
10.3	ESTUDIO DE LA RESOLUCIÓN	116
10.3.1	<i>Conclusiones</i>	120
10.4	RESPUESTA A PERTURBACIONES COMPLEJAS	124
10.4.1	<i>Conclusiones</i>	131
10.5	EVALUACIÓN DE LOS MÉTODOS CON CONJUNTOS DE DATOS ESTÁNDARES	131
10.5.1	<i>Conclusiones</i>	133
10.6	RECONSTRUCCIONES REALIZADAS A PARTIR DE MEDIDAS REALES OBTENIDAS DE FANTOMAS	135
10.6.1	<i>Conclusiones</i>	140
<b>11</b>	<b>DEMO-IMPETOM I V. 1.0</b>	<b>141</b>
11.1	INTRODUCCIÓN	141
11.2	POSIBILIDADES DE IMPETOMI	141
11.3	INSTALACIÓN Y REQUERIMIENTOS MÍNIMOS	142
11.4	INICIO DEL PROGRAMA	142
11.5	VENTANA DE INICIO	143
11.6	VENTANA DE INGRESO DE DATOS DEL PACIENTE	145
11.7	LECTURA DE MEDIDAS	145
11.8	RECONSTRUCCIONES	148
11.9	MÉTODO MATRIZ DE SENSIBILIDAD Y RETROPROYECCIÓN	149
11.10	IMÁGENES EN IMPETOMI	151
11.11	RECONSTRUCCIÓN UTILIZANDO NEWTON RAPHSON	154
11.12	GUARDAR LAS FIGURAS	155
11.13	FORMATO DE ARCHIVO	156
<b>12</b>	<b>TIEMPOS Y COSTOS</b>	<b>159</b>
12.1	INTRODUCCIÓN	159
12.2	TIEMPOS	159
12.3	COSTOS DE DESARROLLO	162
12.3.1	<i>Compras</i>	162
12.3.2	<i>Costos de desarrollo</i>	162

## IMPETOM I

12.4	POSIBILIDADES DE COMERCIALIZACIÓN DE IMPETOMI	163
12.4.1	<i>Desarrollo como proyecto empresarial</i>	163
12.4.2	<i>Desarrollo de una versión comercial</i>	165
<b>APÉNDICE A LA RELACIÓN DE SENSIBILIDAD DE GESELOWITZ</b>		<b>166</b>
<b>APÉNDICE B MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS</b>		<b>170</b>
	<i>Representación de un campo de una dimensión</i>	170
	<i>Funciones base lineales</i>	171
	<i>Funciones Base como funciones de ponderación</i>	173
	<i>Funciones base Cuadráticas</i>	175
	ELEMENTOS 2D Y 3D	176
	ELEMENTOS TRIANGULARES	177
	EJEMPLO: CONDUCCIÓN DEL CALOR EN ESTADO ESTACIONARIO EN UNA DIMENSIÓN	178
	<i>Ecuación Integral</i>	179
	<i>Integración por partes</i>	179
	<i>Aproximación por Elementos Finitos</i>	180
	<i>Calculo de las integrales por elemento</i>	181
	<i>Ensamblado</i>	182
	<i>Conclusiones</i>	184
<b>APÉNDICE C RESPUESTA A PERTURBACIONES SIMPLES</b>		<b>185</b>
<b>REFERENCIAS</b>		<b>195</b>

Índice de Figuras

Figura 1 Modelo de la impedancia en los tejidos (a) modelo de Philippson (b) modelo de Fricke y Morse ..... 14

Figura 2 Respuesta en Frecuencia de la Impedancia en los Tejidos. Tomado de Boone, Barber y Brown [4]. ..... 14

Figura 3 Estrategia de medida tetrapolar adyacente. Tomado de [1]. ..... 26

Figura 4 Estrategia de medida Tetrapolar Interlaceado. Tomado de [1] ..... 27

Figura 5 Modelo de la región a analizar ..... 36

Figura 6 Disposición de los electrodos en un caso real..... 41

Figura 7 Disposición idealizada de los electrodos..... 41

Figura 8 Equipotenciales y líneas de corriente para la inyección mediante un dipolo puntual de corriente ..... 43

Figura 9 Transformación al espacio de equipotenciales y líneas de corriente ..... 44

Figura 10 Respuesta en la frontera para perturbaciones puntuales de la conductividad de diferente profundidad (q). ..... 47

Figura 11 Regularización de Tikhonov, con parámetro  $\mathbf{I} = 2$  (sobre-regularizado),  $\mathbf{I} = 0,2$  (regularización apropiada),  $\mathbf{I} = 0,003$  (sub-regularizado). Tomado de [8]. ..... 56

Figura 12 Curva L, tomado de [8]. ..... 56

Figura 13 Curva L y su curvatura tomado de [8]. ..... 57

Figura 14 Criterio de Picard para medidas reales ..... 63

Figura 15 Criterio de Picard para otro conjunto de medidas reales..... 63

Figura 16 Grillas de 196, 584 y 1884 elementos ..... 64

Figura 17 Grilla 492 elementos      Figura 18 Grilla 1968 elementos ..... 65

Figura 19 Potencial en los Nodos de la Grilla, al aplicar corriente por dos electrodos adyacentes. Se obtuvo resolviendo el problema directo mediante FEM ..... 67

Figura 20 Cálculo del potencial usando: o-sumatoria, \*-modelo de dipolos ..... 69

Figura 21 Error relativo en el cálculo del potencial ..... 70

Figura 22 Error relativo de gu (Grilla de 196 elementos (a) sin refinamiento,(b) un refinamiento y (c) dos refinamientos) ..... 72

Figura 23 Error relativo de gu (Grilla de 584 elementos (a) sin refinamiento,(b) un refinamiento y (c) dos refinamientos) ..... 73

Figura 24 Error relativo de gu (Grilla de 1968 elementos (a) sin refinamiento,(b) un refinamiento y (c) dos refinamientos)..... 73

Figura 25 Comparación de errores según la cantidad de elementos de cada grilla utilizada, entre paréntesis se indica el número de refinamientos ..... 74

Figura 26 Valores singulares de la matriz de Sensibilidad ..... 77

Figura 27 Reconstrucciones regularizadas mediante la TSVD tomando diferentes niveles de truncamiento. .... 78

Figura 28 Gráfica de función de OCV      Figura 29 Reconstrucción ..... 79

Figura 30 Varianza de los pixeles para 100 reconstrucciones utilizando el método de la Varianza ..... 80

Figura 31 Gráfico del criterio de la cuva\_L..... 81

Figura 32 Reconstrucción utilizando el método de Tikhonov..... 81

Figura 33 Reconstrucción vista en 3D luego de la regularización de Tikhonov ..... 81

## IMPETOM I

Figura 34 Varianza en cada píxel para 100 reconstrucciones utilizando el método de Tikhonov .....	82
Figura 35 perfil del logaritmo de gradientes de voltaje en la frontera.....	84
Figura 36 equipotenciales generadas por el primer par de inyección de corrientes .....	84
Figura 37 perfil de variaciones de potencial sobre la frontera normalizado.....	85
Figura 38 Retroproyección de las medidas de voltaje sobre la superficie para cada una de las 16 inyecciones de corriente .....	86
Figura 39 Reconstrucción para datos generados con fantasmas usando el método de retroproyección.....	88
Figura 40 Máscara correspondiente a la inyección por el primer par de electrodos .....	89
Figura 41 Reconstrucción sin utilizar filtro .....	90
Figura 42 Reconstrucción utilizando filtro .....	90
Figura 43 Variación de los valores singulares de la matriz de filtrado <i>FB</i> .....	91
Figura 44 20 valores singulares .....	92
Figura 45 25 valores singulares .....	92
Figura 46 40 valores singulares .....	92
Figura 47 60 valores singulares .....	92
Figura 48 80 valores singulares .....	93
Figura 49 104 valores singulares .....	93
Figura 50 Función base asociada al nodo <i>i</i> .....	99
Figura 51 Distribución de potenciales para una inyección de corriente en un medio homogéneo obtenida resolviendo la ecuación 25 .....	101
Figura 52 Construcción de la matriz <i>L</i> .....	106
Figura 53 Distribución de conductividades simulada.....	108
Figura 54 Regularización de Thikonov .....	108
Figura 55 Regularización Operador Derivada .....	108
Figura 56 Regularización de Thikonov 3D .....	108
Figura 57 Regularización Derivada 3D.....	108
Figura 58 Distribución de conductividades simulada.....	109
Figura 59 Regularización de Thikonov .....	109
Figura 60 Regularización Operador Derivada .....	109
Figura 61 Regularización de Thikonov 3D .....	109
Figura 62 Regularización Derivada 3D.....	109
Figura 63 Datos reales regularizados con la curva <i>L</i> .....	110
Figura 64 Datos reales regularizados con la matriz <i>R</i> .....	110
Figura 65 Residuo Tikhonov.....	110
Figura 66 Residuo Operador Derivada .....	110
Figura 67 Discontinuidad utilizada para evaluar la linealidad de cada método. ....	113
Figura 68 Linealidad del método de Retroproyección, en las abcisas se encuentran las diferencias entre la conductividad homogénea (2 mS/cm) y las perturbaciones de conductividad (Tabla 3 ).....	114
Figura 69 Linealidad del método Matriz de Sensibilidad.....	114
Figura 70 Linealidad del método Newton Raphson.....	115
Figura 71 Rango lineal del método Newton Raphson, dentro del rango de 6 mS/cm.....	116
Figura 72 Interpretación de la función de PSF como límite de resolución de un sistema de imágenes lineal .....	118

## IMPETOM I

Figura 73 Ubicación de las distintas deltas para la evaluación .....	119
Figura 74 Delta ubicada en el centro .....	121
Figura 75 Reconstrucción.....	121
Figura 76 Delta ubicada en zona intermedia .....	121
Figura 77 Reconstrucción.....	121
Figura 78 Delta ubicada en zona periférica .....	121
Figura 79 Reconstrucción.....	121
Figura 80 Delta ubicada en el centro .....	122
Figura 81 Reconstrucción.....	122
Figura 82 Delta ubicada en zona intermedia .....	122
Figura 83 Reconstrucción.....	122
Figura 84 Delta ubicada en zona periférica .....	122
Figura 85 Reconstrucción.....	122
Figura 86 Delta ubicada en el centro .....	123
Figura 87 Reconstrucción.....	123
Figura 88 Delta ubicada en zona intermedia .....	123
Figura 89 Reconstrucción.....	123
Figura 90 Delta ubicada en zona periférica .....	123
Figura 91 Reconstrucción.....	123
Figura 92 Perturbación compleja .....	125
Figura 93 Reconstrucción.....	125
Figura 94 Perturbación compleja .....	125
Figura 95 Reconstrucción.....	125
Figura 96 Perturbación compleja .....	125
Figura 97 Reconstrucción.....	125
Figura 98 Vista 3D perturbación compleja.....	126
Figura 99 Vista 3D reconstrucción.....	126
Figura 100 Vista 3D perturbación compleja.....	126
Figura 101 Vista 3D reconstrucción.....	126
Figura 102 Vista 3D perturbación compleja.....	126
Figura 103 Vista 3D reconstrucción.....	126
Figura 104 Perturbación compleja .....	127
Figura 105 Reconstrucción.....	127
Figura 106 Perturbación compleja .....	127
Figura 107 Reconstrucción.....	127
Figura 108 Perturbación compleja .....	127
Figura 109 Reconstrucción.....	127
Figura 110 Vista 3D perturbación compleja.....	128
Figura 111 Vista 3D reconstrucción.....	128
Figura 112 Vista 3D perturbación compleja.....	128
Figura 113 Vista 3D reconstrucción.....	128
Figura 114 Vista 3D perturbación compleja.....	128
Figura 115 Vista 3D reconstrucción.....	128
Figura 116 Perturbación compleja .....	129
Figura 117 Reconstrucción.....	129
Figura 118 Perturbación compleja .....	129

## IMPETOM I

Figura 119 Reconstrucción.....	129
Figura 120 Perturbación compleja.....	129
Figura 121 Reconstrucción.....	129
Figura 122 Vista 3D perturbación compleja.....	130
Figura 123 Vista 3D reconstrucción.....	130
Figura 124 Vista 3D perturbación compleja.....	130
Figura 125 Reconstrucción.....	130
Figura 126 Vista 3D perturbación compleja.....	130
Figura 127 Vista 3D reconstrucción.....	130
Figura 128 Gráfico del FWHM para los valores descriptos en la Tabla 2 utilizando el método de la Retroproyección.....	132
Figura 129 Gráfico del valor pico de la conductividad reconstruida para los valores descriptos en la Tabla 2 utilizando el método de la Retroproyección.....	132
Figura 130 Gráfico del FWHM para los valores descriptos en la Tabla 2 utilizando el método de la Matriz de Sensibilidad.....	132
Figura 131 Gráfico del valor pico de la conductividad reconstruida para los valores descriptos en la Tabla 2 utilizando el método de la la Matriz de Sensibilidad.....	132
Figura 132 Gráfico del FWHM para los valores descriptos en la Tabla 2 utilizando el método de Newton Raphson.....	133
Figura 133 Gráfico del valor pico de la conductividad reconstruida para los valores descriptos en la Tabla 2 utilizando el método de Newton Raphson.....	133
Figura 134 Fantomas utilizado en la Universidad de Kuopio, tomado de <a href="http://www.venda.uku.fi">http://www.venda.uku.fi</a> .....	135
Figura 135 Reconstrucción de medidas reales.....	136
Figura 136 Reconstrucción de medidas reales.....	136
Figura 137 Reconstrucción de medidas reales.....	136
Figura 138 Reconstrucción de medidas reales.....	137
Figura 139 Reconstrucción de medidas reales.....	137
Figura 140 Reconstrucción de medidas reales.....	137
Figura 141 Reconstrucción de medidas reales.....	138
Figura 142 Reconstrucción de medidas reales.....	138
Figura 143 Reconstrucción de medidas reales.....	138
Figura 144 Reconstrucción de medidas reales.....	139
Figura 145 Reconstrucción de medidas reales.....	139
Figura 146 Reconstrucción de medidas reales.....	139
Figura 147 Pantalla inicial de IMPETOMI.....	143
Figura 148 Dialogo de confirmación cerrar IMPETOMI.....	144
Figura 149 Ventana de ingreso de datos del paciente.....	145
Figura 150 Ventana de cambio de camino para las medidas.....	146
Figura 151 Ventana de cambio de directorio.....	146
Figura 152 Dialogo de lectura de datos.....	146
Figura 153 Leer medidas en el disco.....	147
Figura 154 Botón de reconstrucción.....	148
Figura 155 Elección del método de reconstrucción.....	149
Figura 156 Menú de elección de grilla.....	149
Figura 157 Tipo de gráfico.....	149

## IMPETOM I

Figura 158 Muestra grilla .....	150
Figura 159 Reconstrucción.....	151
Figura 160 Menú archivo .....	152
Figura 161 Reconstrucción en 1968 elementos .....	153
Figura 162 Reconstrucción con opción 3D .....	153
Figura 163 Reconstrucción en vista en 3D .....	153
Figura 164 Elección de número de iteraciones .....	154
Figura 165 Reconstrucción hecha con Newton Raphson.....	155
Figura 166 Salvar la imagen de reconstrucción.....	156
Figura 167 Indexación de medidas, sin importar por donde se inyecta siempre se debe a empezar a medir por el mismo par de electrodo.....	157
Figura 168 Distribución de tareas sobre el tiempo total.....	160
Figura 169 Distribución de costos sobre el total .....	163
Figura 170 Temperatura en función de la posición .....	170
Figura 171 Campo y aproximaciones lineales a trozos .....	171
Figura 172 Parametrización en las funciones base .....	171
Figura 173 Mapeo a las coordenadas locales .....	172
Figura 174 Interpolación con las funciones base.....	173
Figura 175 funciones base para cada nodo .....	174
Figura 176 Mapeo de las funciones base .....	175
Figura 177 funciones base cuadráticas .....	175
Figura 178 Funciones base para elementos cuadriláteros.....	176
Figura 179 Coordenadas de Area .....	177
Figura 180 Original, C: 0.0 D: 0.1 .....	186
Figura 181 Reconstrucción.....	186
Figura 182 Original, C: 0.0 D: 0.2 .....	186
Figura 183 Reconstrucción.....	186
Figura 184 Original, C: 0.0 D: 0.3 .....	186
Figura 185 Reconstrucción.....	186
Figura 186 Original, C: 0.5 D: 0.1 .....	187
Figura 187 Reconstrucción.....	187
Figura 188 Original, C: 0.5 D: 0.2 .....	187
Figura 189 Reconstrucción.....	187
Figura 190 Original, C: 0.5 D: 0.3 .....	187
Figura 191 Reconstrucción.....	187
Figura 192 Original, C: 0.75 D: 0.1 .....	188
Figura 193 Reconstrucción.....	188
Figura 194 Original, C: 0.75 D: 0.2 .....	188
Figura 195 Reconstrucción.....	188
Figura 196 Original, C: 0.75 D: 0.3 .....	188
Figura 197 Reconstrucción.....	188
Figura 198 Original, C: 0.0 D: 0.1 .....	189
Figura 199 Reconstrucción.....	189
Figura 200 Original, C: 0.0 D: 0.2 .....	189
Figura 201 Reconstrucción.....	189
Figura 202 Original, C: 0.0 D: 0.3 .....	189

## IMPETOM I

Figura 203 Reconstrucción.....	189
Figura 204 Original, C: 0.5 D: 0.1 .....	190
Figura 205 Reconstrucción.....	190
Figura 206 Original, C: 0.5 D: 0.2 .....	190
Figura 207 Reconstrucción.....	190
Figura 208 Original, C: 0.5 D: 0.3 .....	190
Figura 209 Reconstrucción.....	190
Figura 210 Original, C: 0.75 D: 0.1 .....	191
Figura 211 Reconstrucción.....	191
Figura 212 Original, C: 0.75 D: 0.2 .....	191
Figura 213 Reconstrucción.....	191
Figura 214 Original, C: 0.75 D: 0.3 .....	191
Figura 215 Reconstrucción.....	191
Figura 216 Original, C: 0.0 D: 0.1 .....	192
Figura 217 Reconstrucción.....	192
Figura 218 Original, C: 0.0 D: 0.2 .....	192
Figura 219 Reconstrucción.....	192
Figura 220 Original, C: 0.0 D: 0.3 .....	192
Figura 221 Reconstrucción.....	192
Figura 222 Original, C: 0.5 D: 0.1 .....	193
Figura 223 Reconstrucción.....	193
Figura 224 Original, C: 0.5 D: 0.2 .....	193
Figura 225 Reconstrucción.....	193
Figura 226 Original, C: 0.5 D: 0.3 .....	193
Figura 227 Reconstrucción.....	193
Figura 228 Original, C: 0.75 D: 0.1 .....	194
Figura 229 Reconstrucción.....	194
Figura 230 Original, C: 0.75 D: 0.2 .....	194
Figura 231 Reconstrucción.....	194
Figura 232 Original, C: 0.75 D: 0.3 .....	194
Figura 233 Reconstrucción.....	194

**Índice de Tablas**

Tabla 1 Valores de resistividad para varios tejidos humanos. Se ordenan en franjas los valores publicados por Boone, Barber y Brown [4].	15
Tabla 2 Números de condición de S	76
Tabla 3 Parámetros de construcción de distribuciones de prueba, para evaluación de la linealidad	113
Tabla 4 Resultados de FWHM para los tres métodos	120
Tabla 5 Representación gráfica de la Tabla 4	120
Tabla 6 Conjunto de datos para la evaluación comparativa de los distintos algoritmos	124
Tabla 7 Conjunto de datos para la evaluación comparativa de los distintos algoritmos en EIT.	131
Tabla 8 Distribución de horas por rubro	159
Tabla 9 Distribución de tareas por mes (Ago-00 a Mar-01)	160
Tabla 10 Distribución de tareas por mes (Abr-01 a Nov-01)	161
Tabla 11 Distribución de tareas por mes (Dic-01 a Jun-02)	161
Tabla 12 Distribución de horas por mes	161
Tabla 13 Distribución de horas por rubro	161
Tabla 14 Costos por compras	162
Tabla 15 Costos de desarrollo por tarea	162
Tabla 16 Resumen de costos	163
Tabla 17 amortización de la inversión	164
Tabla 18 ingresos por soporte	164
Tabla 19 amortización de la inversión	165

# Introducción

El presente trabajo surge a partir del interés de parte del Núcleo de Ingeniería Biomédica en la implementación de un tomógrafo por medida de impedancias, con aplicaciones clínicas enfocadas principalmente en el monitoreo de pacientes con edema pulmonar.

El desarrollo del proyecto global se dividió en dos grupos: Impetom-C, encargado del desarrollo del dispositivo físico de adquisición y comunicación de datos de medida e Impetom-I, grupo que presenta este trabajo, encargado del desarrollo de una aplicación de software para la generación, visualización y posterior almacenamiento de las imágenes.

La tomografía por impedancia se encuentra actualmente en un estado de evolución, habiéndose obtenido hasta el momento resultados escasos en cuanto a la obtención de sistemas que tengan una aplicación práctica útil.

Considerando las técnicas de reconstrucción de las imágenes tomográficas a partir de las medidas obtenidas por el hardware, existen opciones diversas. Se realizó un estudio general de las mismas, revisándose bibliografía heterogénea y con conclusiones a veces encontradas sobre la utilidad y rendimiento de las diferentes técnicas.

Dada la falta de experiencia sobre el tema y la imposibilidad de realizar evaluaciones definitivas no se eligió una técnica de reconstrucción en particular, acercando entonces el proyecto a un trabajo amplio de introducción y evaluación preliminar de las distintas posibilidades de la tomografía por impedancia.

Se optó por el análisis e implementación de rutinas con tres técnicas distintas de reconstrucción, que constituyen una muestra bastante representativa de todo el espectro de técnicas investigadas hasta el momento. Con esto se deja abierto el camino a futuras profundizaciones en el tema.

Sobre el final del trabajo se realizó una evaluación comparativa de las tres técnicas estudiadas, a partir de rutinas de simulación desarrolladas por el grupo y del escaso material de medidas reales disponible.

El trabajo culmina con el desarrollo de la aplicación en sí, en la que se deja a cargo del usuario la elección de la técnica de reconstrucción a utilizar. La aplicación consiste en rutinas de reconstrucción y una interfaz gráfica amigable, desarrolladas en Matlab y compiladas en C++.

# 1 Propiedades eléctricas de los tejidos

## 1.1 Modelo de la impedancia en los tejidos

Durante el siglo XIX varios investigadores demostraron que la resistencia de los tejidos decrece a medida que la frecuencia para la cual se realiza la medida crece (Bois-Reymond) hasta que sobre el final del siglo XIX Bernstein sugirió su ‘hipótesis de la membrana’, por la cual un tejido consiste en células conductivas encerradas por una membrana aislante rodeadas por el intersticio el cual es conductivo [4]. Esto permite una explicación simple de la variación de la resistencia de los tejidos en función de la frecuencia. A bajas frecuencias la corriente debe fluir alrededor de las células dado que las membranas actúan como aislantes, a altas frecuencias la capacitancia de las finas membranas permiten que la corriente ingrese a las células incrementando el volumen por el cual circula corriente.

En 1921 Philippon [4] modeló la impedancia de los tejidos como resistencias y capacitores como lo muestra la figura 1(a) ( $R_i$  Representa la resistencia del espacio intracelular mientras que  $R_m$  y  $C_m$  representan la resistencia y la capacitancia de la membrana).

En este modelo el comportamiento a bajas frecuencias es dominado por  $R_i + R_m$  dado que  $C_m$  presenta una alta impedancia entonces fluye muy poca corriente a través de él.

A medida que aumenta la frecuencia la impedancia del capacitor  $C_m$  decrece y comienza a cortocircuitar a  $R_m$ , la impedancia total decrece hasta llegar a  $R_i$ , en la figura 2 se puede ver la respuesta en frecuencia con valores que varían de 600  $\Omega$  entre 100 Hz y 200 Hz hasta 300  $\Omega$  entre 1 KHz y 10 KHz..

# IMPETOM I

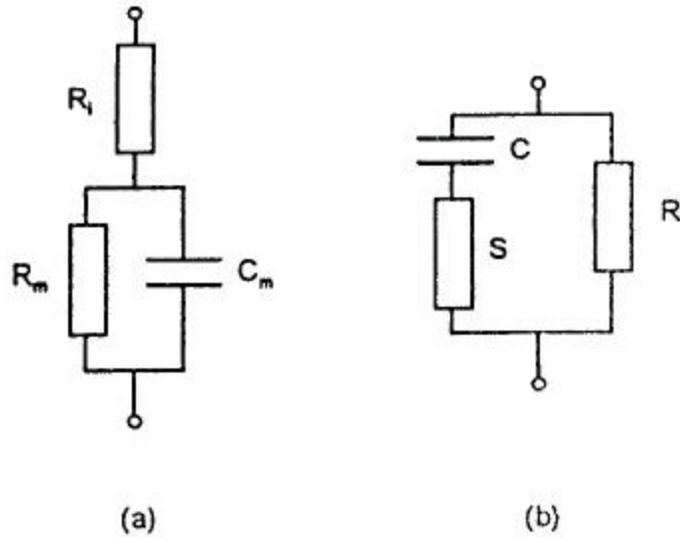


Figura 1 Modelo de la impedancia en los tejidos (a) modelo de Philippon (b) modelo de Fricke y Morse

Con el modelo de Fricke y Morse (1925) mostrado en la figura 1(b) se obtienen resultados similares.  $R$  representa la resistividad del intersticio,  $S$  la del espacio intracelular y  $C$  la capacitancia de la membrana.

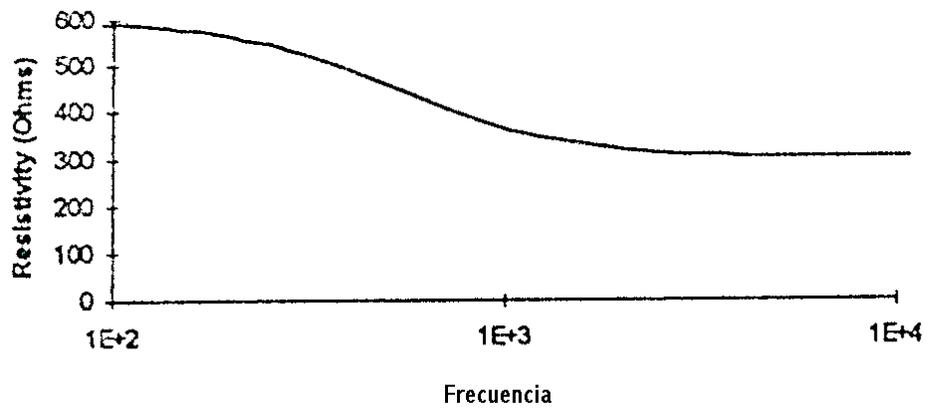


Figura 2 Respuesta en Frecuencia de la Impedancia en los Tejidos. Tomado de Boone, Barber y Brown [4].

## 1.2 La impedancia en tejidos normales

A ciertas frecuencias existe un gran contraste entre los valores de resistividad de varios tejidos. La tabla siguiente muestra algunos valores en tejidos humanos para valores de frecuencia entre 20 KHz y 100 KHz (Barber y Brown 1984).

Tejido	Resistividad ( $\Omega\text{m}$ )
Grasa	21-28
músculo esquelético - transversal	18-23
Hueso	17
Pulmón	7.3-24
cerebro - materia blanca	6.8
músculo cardíaco - transversal	4.2-5.1
Hígado	3.5-5.5
cerebro - materia gris	2.8
músculo cardíaco - longitudinal	1.6-5.8
Sangre	1.5
músculo esquelético - longitudinal	1.3-1.5
Plasma	0.66
Fluido céfalo-raquídeo	0.65

Tabla 1 Valores de resistividad para varios tejidos humanos. Se ordenan en franjas los valores publicados por Boone, Barber y Brown [4].

## 1.3 Anisotropía en los tejidos

Muchos tejidos son anisotrópicos, es decir sus propiedades eléctricas dependen de la dirección en la que se realiza las medidas. Por ejemplo, los tejidos musculares son fibras largas y finas que conducen la electricidad longitudinalmente mejor que transversalmente.

La anisotropía tiene una importante incidencia en la reconstrucción de imágenes mediante la EIT, dado que en presencia de tejidos anisotrópicos más de una distribución de impedancia puede producir el mismo patrón de medidas sobre los electrodos. Por lo tanto es imposible reconstruir una imagen de un tejido anisotrópico.

Dado que la impedancia de las membranas celulares decrece a medida que la frecuencia aumenta, la anisotropía es menos significativa en altas frecuencias. Esto no es necesariamente una ventaja ya que el contraste entre valores de resistividades de distintos tejidos también decrece con el aumento de frecuencia.

## 1.4 Variaciones de impedancias

La anatomía estudiada se refleja en una distribución dada de impedancia.

La EIT sirve además para mostrar variaciones de impedancia motivadas por cambios (fisiológicos o patológicos) de los órganos y tejidos. Aun cuando la impedancia de los tejidos se mantenga constante existirá una variación de impedancia si el órgano varía su forma o tamaño. Por ejemplo el estómago se expande al comer y se contrae al vaciarse, en este caso la EIT sirve para monitorear las funciones gástricas. El llenado y vaciado periódico de los pulmones y los latidos cardiacos son ejemplos de cambios geométricos que repercuten en las distribuciones espaciales de impedancia.

Los estados patológicos pueden causar que los tejidos tomen un valor diferente de impedancia de su rango de valores normales:

- Tejidos normales y con patologías pueden tener diferentes impedancias absolutas para alguna frecuencia en particular. Grant (1923) encontró que a 1KHz un tumor cerebral tiene una resistividad cercana a la mitad del tejido normal.
- Un proceso patológico puede causar directamente un cambio en la impedancia. Por ejemplo, Hossman (1971) demostró que la resistividad cerebral se incrementa hasta en un 100 % durante un golpe y Harreveld (1962) demostró que puede aumentar hasta un 20 % durante un ataque de epilepsia
- Un proceso patológico puede modificar los cambios de impedancia que existen durante una función fisiológica normal. Por ejemplo, durante una obstrucción quirúrgica de las vías respiratorias en cerdos, Hahn (1995) demostró que los cambios en la resistividad durante los ciclos respiratorios no forzados se reducen hasta en un 50 %.

## 1.5 Impedancia de la piel

La mayor parte de la impedancia de la piel se encuentra en la capa exterior, que tiene un espesor aproximado de 40  $\mu\text{m}$ . El valor de dicha impedancia puede llegar a ser mucho mayor que los valores de los tejidos que se quieren analizar.

Rosell (1988) realizó medidas de resistencia de la piel obteniendo valores entre 100 $\Omega$  y 1 K $\Omega$  a frecuencias de hasta 100 KHz. A estas frecuencias, la resistencia medida a través del tórax humano es de algunos ohmios, por lo tanto valores de voltaje mucho mayores se generan sobre la piel que sobre los tejidos. Esto es una posible fuente de errores si el manejo del instrumental de medida no es cuidadoso. La impedancia de la piel puede ser fácilmente reducida por abrasión, al menos en adultos, lo que sugiere una buena preparación de la piel antes de aplicar los electrodos.

## 2 La Tomografía por Impedancia Eléctrica

### 2.1 Introducción

Existen esencialmente tres formas de utilizar la Tomografía por Impedancia Eléctrica, (EIT por la sigla en inglés) en el ambiente clínico;

- Construir la imagen de la distribución de impedancia
- Construir la imagen de la variación de la impedancia con la frecuencia.
- Construir la imagen de las variaciones de la impedancia durante cambios fisiológicos

De las tres formas, las dos primeras producen imágenes que muestran como los diferentes tipos de tejidos están distribuidos en el cuerpo, esto se conoce como ‘Caracterización de los Tejidos’ o ‘Imagen Anatómica’. En estas aplicaciones la EIT es utilizada como alternativa o complemento a los Rayos X, Tomografía Computada o Resonancia Magnética.

La tercer técnica produce imágenes de funciones fisiológicas y tiene aplicaciones más complejas de interpretar que las otras técnicas, por ejemplo pequeños cambios en el tiempo de los estados fisiológicos de los tejidos.

La EIT Anatómica (las técnicas que producen imágenes anatómicas) se basa en que los diferentes tipos de tejidos tienen diferente impedancia. Formar una imagen a partir de impedancias es técnicamente difícil. Requiere exactitud en las medidas que no es fácil de obtener y exactitud en el modelo computacional del cuerpo y de los electrodos.

El objetivo de la EIT es determinar la distribución de conductividad interna en una región definida partiendo de las medidas realizadas sobre su superficie. Estas medidas generalmente son los voltajes resultantes de la inyección de corrientes conocidas en la región. También se utilizan las medidas de corrientes generadas a partir de la aplicación de voltajes sobre la superficie.

A partir de los valores del potencial sobre la superficie es posible determinar la única distribución de conductividad interna, en medios isotrópicos.

## IMPETOM I

La imagen puede ser de resistencias o de impedancias o cambios en alguna de ellas. Sin embargo la mayoría de los estudios se basan en la medida de la resistencia en lugar de la impedancia de los tejidos. En nuestro trabajo basaremos la reconstrucción en los valores de resistividades y sus cambios, de acuerdo a lo expuesto en 2.5.

En teoría lo anterior es posible si las medidas se realizan con precisión infinita y sobre la totalidad de la superficie. En la práctica estas condiciones no son cumplidas debido a la limitación en la exactitud de las medidas y además las medidas se realizan sobre un número limitado de puntos (electrodos).

Sin embargo, la práctica ha demostrado que aún es posible obtener reconstrucciones con un número limitado de medidas y admitiendo cierto nivel de imprecisión en las mismas.

La mayoría de los algoritmos de reconstrucción en 2D asumen que la corriente eléctrica es confinada al plano que contiene a los electrodos. En la realidad, si se analiza el problema en 3D el flujo de corriente se dispersa en todas las direcciones lo que contribuye a la distorsión de la reconstrucción.

En general las investigaciones utilizan sistemas que emplean electrodos para aplicar corrientes y medir voltajes, pero existen además otras formas de medir impedancias según Bone *et al* [4]:

- Induciendo corrientes mediante bobinas y midiendo voltajes con electrodos sobre la piel.
- Aplicando corrientes o induciéndolas y midiendo la distribución de campo magnético sobre la superficie con bobinas
- Acoplando los electrodos de corriente y voltaje mediante capacitancias (sin contacto eléctrico directo).

La inducción magnética de corrientes tiene varias ventajas:

- La densidad de corriente en el cuerpo es más uniforme. Con electrodos de corriente existen regiones de alta densidad de corriente cerca de los electrodos.
- Los electrodos pueden ser utilizados con un solo propósito (solo medida de voltaje), que simplifica la instrumentación.

La utilización de sistemas totalmente magnéticos permitirá prescindir de electrodos lo cual sería un gran avance en practicidad y exactitud en las medidas. Actualmente, las altas frecuencias necesarias para su utilización (1MHz) lo hacen poco práctico para las aplicaciones médicas según [4].

Concluyendo, la reconstrucción de imágenes a través de la EIT se basa en un proceso de adquisición de datos conceptualmente simple pero muy difícil de implementar. Muchos de los problemas de implementación que afectaban las primeras investigaciones fueron resueltos pero el ruido y las interferencias son factores limitantes.

## 2.2 Imágenes dinámicas y estáticas

La reconstrucción de imágenes estáticas consiste en generar una imagen de la distribución de impedancia o tomar los cambios de impedancia con respecto a una distribución de impedancia uniforme; debido a que diferentes tejidos tienen diferente resistividad (ver Tabla 1) se obtiene una representación de la forma de los órganos en el interior del cuerpo, por lo que a estas reconstrucciones también se las denomina anatómicas. En la práctica, este problema es muy difícil de resolver dado que las imágenes son muy sensibles a los errores de medida y a errores en el modelo matemático del cuerpo.

En el caso de las reconstrucciones de imágenes de cambios en la resistividad medidos a través de cambios en las medidas de voltaje, el problema se hace menos sensible a los errores de medida según Bone *et al* [4]. Esto se debe a que parte de los errores se cancelan parcialmente en la resta de los conjuntos de medidas de voltaje. Las imágenes obtenidas como cambios de resistividad son conocidas como “imágenes dinámicas”. Esto no limita las aplicaciones de la EIT dado que se puede igualmente obtener información anatómica a partir de cambios en la resistividad.

## 2.3 Simplificación del problema

Para simplificar el problema matemático se realizan las siguientes aproximaciones:

- El objeto a analizar es cilíndrico
- La conductividad y el potencial no cambia a lo largo del cilindro, el problema es por lo tanto en 2 dimensiones.
- Los electrodos están uniformemente distribuidos alrededor del cuerpo
- Los electrodos tienen una resistencia de contacto con el cuerpo nula.
- Los electrodos se consideran puntuales.

## 2.4 Unicidad de la solución

Dada la complejidad de la reconstrucción es razonable preguntarse si es posible resolver el problema por lo menos en teoría, y si es así, bajo qué condiciones. Una condición preliminar a esto es la unicidad de la solución del problema: dado un conjunto de medidas de voltaje sobre la frontera, ¿podemos estar seguros que existe una única solución de las ecuaciones que definen el problema?. Según demuestra Barber en condiciones de isotropía existe una única distribución de resistividad de los tejidos en el cuerpo para un instante dado. La no unicidad de la solución significaría que un mismo conjunto de medidas podría producir más de una imagen. Según demuestra Barber en hipótesis de isotropía la solución al problema es única.

Por otro lado, lo anterior es válido si se asumen que las medidas de voltaje se realizan sobre toda la frontera es decir son continuas. En la práctica sólo se pueden medir los voltajes y

corrientes sobre los electrodos, es decir tenemos un conjunto acotado de datos. La pregunta es si es válido el teorema de unicidad para el caso de conocer los valores de voltaje no en toda la frontera sino sólo sobre los electrodos. De la literatura estudiada no se encuentran trabajos teóricos que demuestren formalmente la unicidad de la solución bajo esta hipótesis. La viabilidad de la resolución en este caso queda establecida en la práctica por la utilidad de las imágenes obtenidas.

La ecuación a resolver para obtener los voltajes sobre la frontera a partir de la conductividad en la región es la ecuación de Poisson (se explica en detalle en el capítulo 3). La existencia de una solución a la ecuación de Poisson en la teoría no es garantía de que se pueda generar una imagen en la práctica, ya que existen 2 problemas adicionales:

- La determinación de una solución puede no ser realizable utilizando la más avanzada tecnología en computadoras.
- El problema en EIT puede ser mal condicionado, es decir que la resolución puede ser muy sensible a los niveles de ruido y a los errores sistemáticos de las medidas de voltaje. Grandes cambios en la conductividad pueden producir pequeños cambios en los voltajes sobre la frontera especialmente cuando se ubican en el centro del cuerpo.

### **2.5 Decisiones de proyecto de IMPETOM-I**

Para el proyecto IMPETOM-I se tomaron las siguientes decisiones:

#### *Tipo de imagen*

Se optó por generar imágenes estáticas o anatómicas pues cada imagen no depende de algún conjunto previo de medidas tomadas como referencia. Para lograr este objetivo se calculará el perfil de conductividades dentro de la región de interés, no se tendrá en cuenta la parte imaginaria de la impedancia por lo que nos independizamos de la frecuencia a utilizar por IMPETOM-C. Según [4] los valores resistividad (inverso de la conductividad) para frecuencias entre 20 kHz y 100 kHz mostrados en la Tabla 1 sugieren que no hay cambios significativos en la resistividad de los tejidos en este rango de frecuencias, se concordó con IMPETOM-C la utilización de una frecuencia de trabajo de 50 kHz.

## 3 Reconstrucción tomográfica de imágenes

La reconstrucción tomográfica de imágenes es el proceso de convertir las medidas de voltaje en imágenes. La imagen puede ser de resistencias o de impedancias o cambios en alguna de ellas. El problema de la reconstrucción es un tipo de Problema Inverso mientras que el cálculo de los voltajes sobre la superficie a partir de las corrientes aplicadas, dada una distribución de impedancias conocidas se llama Problema Directo.

### 3.1 Análisis Teórico del Problema

#### 3.1.1 Ecuaciones del sistema

Las ecuaciones que gobiernan la interacción entre la electricidad y el magnetismo son las ecuaciones de Maxwell. Para el caso de la EIT se pueden asumir varias simplificaciones para reducir la complejidad del sistema. La frecuencia de la corriente aplicada es lo suficientemente baja como para que las corrientes de desplazamiento puedan ser ignoradas. Se considera la región como un conductor iónico y por lo tanto pueden usarse las ecuaciones cuasi-estáticas de Maxwell, en las cuales la relación entre el campo Magnético y el Eléctrico pueden ser planteadas de la siguiente forma:

Campo Eléctrico:

$$\nabla \cdot E = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{e}, \mathbf{e}_0} \quad \text{Ec. 3.1}$$

$$\nabla \times E = 0 \quad \text{Ec. 3.2}$$

Campo Magnético:

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \text{Ec. 3.3}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad \text{Ec. 3.4}$$

Donde  $\nabla$  es el operador Gradiente,  $E$  es el campo eléctrico,  $B$  es la intensidad de flujo magnético,  $\mathbf{r}$  es la densidad de carga,  $\epsilon_r$  y  $\epsilon_0$  son la permitividad relativa y la permitividad del espacio libre,  $\mu_r$  y  $\mu_0$  son la permeabilidad relativa y la permeabilidad del espacio libre y  $J$  es la densidad de corriente.

La permeabilidad magnética de los tejidos biológicos es muy baja, por lo que solo se analizarán las propiedades eléctricas del medio.

Se puede expresar el campo eléctrico en función del potencial eléctrico  $\Phi$  :

$$E = -\nabla\Phi \quad \text{Ec. 3.5}$$

Combinando las ecuaciones Ec.3.1 y Ec.3.5 se llega a la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\mathbf{r}}{\epsilon_r\epsilon_0} \quad \text{Ec. 3.6}$$

y si no existen cargas libres,  $\mathbf{r}=0$  y se llega a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{Ec. 3.7}$$

Esta ecuación diferencial en derivadas parciales tiene infinitas soluciones, para cada una existe una distribución de  $\Phi$  . Para limitar dichas soluciones se aplican condiciones de borde las que especifican ciertos valores en la frontera.

Las condiciones de borde pueden ser tanto las Condiciones de Dirichlet, en las cuales se especifican los potenciales sobre la frontera, las Condiciones de Neumann sobre la densidad de corriente que atraviesa la frontera o una mezcla de ellas.

### 3.1.2 El Problema Directo

Si consideramos la forma general de la Ley de Ohm para un punto dentro de un conductor ohmico, tenemos:

$$J = \mathbf{s}E \quad \text{Ec. 3.8}$$

donde  $\mathbf{s}$  es la conductividad. Si dentro del medio no existen fuentes de corriente entonces:

$$\nabla J = 0 \quad \text{Ec. 3.9}$$

combinando las ecuaciones Ec. 3.5, Ec.3.8 y Ec. 3.9

$$\nabla \cdot (\mathbf{s}\nabla\Phi) = 0 \quad \text{Ec. 3.10}$$

desarrollando la divergencia del producto obtenemos la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{s}\nabla\Phi}{\mathbf{s}} \quad \text{Ec. 3.11}$$

comparando la ecuación Ec. 3.7 con la Ec. 3.11 el término  $\frac{\nabla \cdot \mathbf{s}\nabla\Phi}{\mathbf{s}}$  se asemeja a una

distribución de fuentes de corriente, aunque la ecuación Ec.3.11 es una ecuación no lineal.

La solución a la ecuación de Poisson para una distribución de conductividad dada es conocida como el Problema Directo.

La distribución de  $\Phi$  depende de la distribución de conductividad, la forma del objeto y de la posición de los electrodos.

La ecuación Ec.3.11 solamente se puede resolver analíticamente en casos de geometría y condiciones de borde simples. Para la mayoría de las distribuciones de conductividad el Problema Directo debe ser resuelto utilizando técnicas numéricas como por ejemplo el Método de Elementos finitos (FEM). En esta técnica la región es dividida en un número discreto de elementos en los cuales se asume una conductividad uniforme. El Problema Directo es resuelto para cada elemento asegurando la continuidad del voltaje y del flujo de corriente entre elementos vecinos.

Los algoritmos iterativos en cada paso resuelven dicho problema dado que la distribución de conductividades es modificada paso a paso hasta que los voltajes sobre la frontera calculados derivados de la solución convergen con los voltajes medidos.

La solución del Problema Directo también es necesaria en los cálculos de la Matriz de Sensibilidad, que es utilizada en muchos algoritmos de reconstrucción.

La solución del Problema Directo es un componente esencial en la reconstrucción de Imágenes en EIT.

### 3.2 Estrategias de Medidas

Se puede describir el problema directo como la obtención de la distribución de voltajes dentro del conjunto  $\Omega$  (también llamado ROI, "Region Of Interest"), dada una conocida distribución de conductividades conjuntamente con la especificación de las condiciones de frontera en términos de corrientes aplicadas.

El problema inverso es encontrar la distribución de conductividades que sea consistente con los conjuntos de medida. En ciertas circunstancias, un único conjunto de medidas no contiene la suficiente información para reconstruir la imagen, por lo que se hace necesario para la reconstrucción la obtención de un número mínimo de medidas independientes o condiciones de frontera.

En general, cuantas más medidas independientes haya en la reconstrucción, mayor es el número de elementos de conductividad independientes, aumentando así la resolución espacial. Sin embargo, a medida que aumenta el número de electrodos, crece también la dificultad práctica de colocarlos en el paciente. Además la reducción del espacio entre los electrodos produce valores más bajos en los voltajes medidos, disminuyendo la relación señal ruido. En la bibliografía no se encontraron trabajos definitivos sobre el número óptimo de electrodos. En la mayoría de los diseños se utilizan 16 electrodos ([3],[6]) y en algunos casos como el NOSER 32 electrodos ([2]), ver más adelante.

Hay una estrecha vinculación entre la relación señal-ruido de las medidas y las estrategias de medida a utilizar. Aquí haremos una breve reseña de dos de las estrategias más reconocidas como lo son el método Corrientes Óptimas y los métodos Tetrapolares.

#### 3.2.1 Método de las corrientes óptimas o método bipolar

Según Metherall [1], Isaacson (1986) y Giser *et al* (1987), demostraron que para cualquier distribución de corriente en el conjunto  $\Omega$ , existe un conjunto de corrientes óptimas las cuales maximizan la relación señal-ruido en la imagen reconstruida.

Consideremos dos distribuciones de conductividad  $c_0$  y  $c$ . Los correspondientes conjuntos de voltajes  $V_0$  y  $V$ , cuando aplicamos los patrones de corriente  $I$  en la frontera  $\partial\Omega$ .

$$V_0 = F(c_0) I \quad \text{Ec. 3.12}$$

$$V = F(c) I \quad \text{Ec. 3.13}$$

Donde F es el operador que define la solución del problema directo.

Se define la distinguibilidad  $\mathbf{d}$  de las distribuciones de conductividad debido a la corriente I como:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}(I) = \frac{\|F(c)I - F(c_0)I\|}{\|I\|} \quad \text{Ec. 3.14}$$

Para que dos distribuciones de conductividades sean distinguibles entre ellas se tiene que cumplir que  $\mathbf{d} > \mathbf{e}$  donde  $\mathbf{e}$  es la precisión de las medidas.

Por lo tanto el mejor conjunto de corrientes  $I^*$  aplicados a la región, será el que maximice  $\mathbf{d}$  :

$$\mathbf{d}(I^*) = \max_{\|I\|=1} \mathbf{d}(I) = \max_I \frac{\|F(c)I - F(c_0)I\|}{\|I\|} \quad \text{Ec. 3.15}$$

Si se define el operador lineal  $D = \|F(c) - F(c_0)\|$ , Gisser et al (1987) demostró la corriente que lo maximiza es el vector propio que está asociado al mayor valor propio de D. A partir de esta afirmación se desprende la condición de resolución  $\mathbf{I}_{\max} > \mathbf{e}$ , donde  $\mathbf{I}_{\max}$  es el mayor valor propio de D. En la práctica el conjunto de corrientes óptimas no es conocido, pues está asociado a una distribución de conductividades que tampoco es conocida. Cheney *et al* en [2] especifican algoritmos que determinan las corrientes óptimas pese a lo anterior.

Si se disminuye a cero el área de  $\partial\Omega$  que corresponde al área bajo los electrodos, la distinguibilidad también disminuye. En particular si se incrementa el número de electrodos y sólo inyectamos corriente en un par a la vez, también se disminuirá la distinguibilidad. Esto último explica la razón por la cual este tipo de sistemas llamados bipolares, utilizan muchos electrodos y se inyecta corriente por todos a la vez mientras simultáneamente se miden los voltajes en los mismos. De esta forma se incrementa el área por la que pasa la corriente en  $\partial\Omega$  aumentando la distinguibilidad.

Lo anterior atenta contra la eficacia del método, pues el voltaje medido es muy sensible a la impedancia de contacto entre el electrodo y la piel que por otra parte es desconocida, aún si la piel fuera preparada para que disminuya. Estas impedancias de contacto que obviamente no están adaptadas entre ellas provocarán un voltaje parásito que introducirá errores en el voltaje medido el cual no será igual al voltaje en la superficie de la piel.

Además, al problema de las impedancias de contacto se agrega el problema de que la implementación del hardware es más compleja, pues se hacen necesarias tantas fuentes de corrientes como pares de electrodos, y además hay que medir en los mismos electrodos en los que se inyecta corriente.

### 3.2.2 Métodos Tetrapolares

Los métodos Tetrapolares son aquellos que involucran dos electrodos para conducir<sup>1</sup> las corrientes a  $\Omega$  y otros dos para medir simultáneamente, a diferencia del método bipolar que usa un único par para inyectar y medir simultáneamente. Los métodos Tetrapolares resuelven el problema de las impedancias de contacto no conocidas. Pues si hacemos que el circuito de medida de voltaje tenga una impedancia de entrada suficientemente alta, la corriente que pase a través de los electrodos de medida será insignificante lo que eliminará el error en la medida. La exactitud de las fuentes de corrientes juega un rol muy importante en la eliminación de este error.

Dentro de los métodos Tetrapolares existen varias estrategias para medir e inyectar corrientes. Por ejemplo el aplicado por Barber y Brown 1985 es el llamado *Adyacente*; se aplican corrientes por un par y se mide por los pares de electrodos adyacentes. Si utilizamos  $L$  electrodos, situados en la frontera del objeto, entonces se podrán realizar sólo  $(L-1)$  medidas independientes.

La última medida de voltaje no es independiente pues la podríamos hallar por superposición. Si aplicamos corrientes a través de un par de electrodos e ignoramos los voltajes medidos por los pares adyacentes al par que conduce la corriente, para evitar los errores surgidos por medir en los electrodos que inyectan corriente, reduciríamos a  $(L-3)$  las medidas independientes, como se muestra en la figura 3.

Debemos ahora conducir las corrientes en los pares adyacentes y medirlas, por lo que tendríamos  $L(L-3)$  medidas, de las cuales por el Principio de Reciprocidad (ver capítulo 5.1) el número de medidas independientes se reduce a  $L(L-3)/2$ .

Otra estrategia dentro del método Tetrapolar, es la llamada estrategia de *Oposición*. En ésta última la corriente se inyecta por electrodos que están situados en forma diametralmente opuesta y se miden los voltajes con los otros en forma adyacente. Este método da el mismo número de medidas independientes que el método *adyacente*. Esta estrategia mejora la resolución en el centro de las imágenes, por tener una mejor densidad de corriente por dicha zona.

---

<sup>1</sup> Drive pair : par que inyecta la corriente,  
Receive pair: par que recibe la corriente, mide el voltaje.

## IMPETOM I

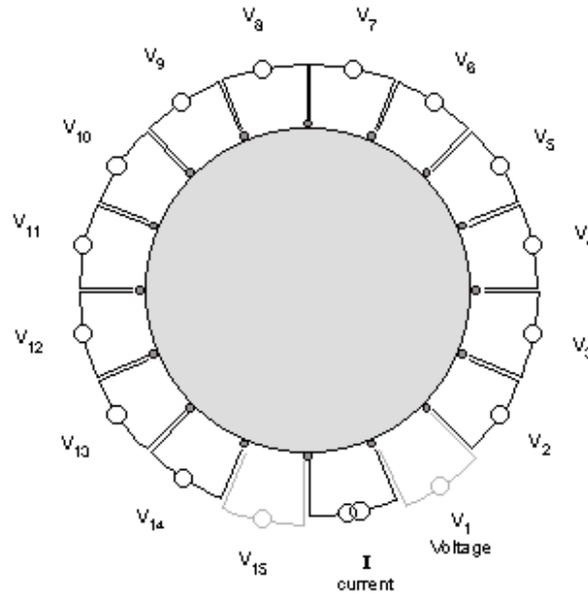


Figura 3 Estrategia de medida tetrapolar adyacente. Tomado de [1].

En la figura 3 se descartan las medidas  $V_1$  y  $V_{15}$  por su cercanía con el par de electrodos de inyección de corriente, para evitar errores en las medidas.

Por último describimos una estrategia utilizada con el equipo MK3a en la Universidad de Sheffield. Se le llama *Interlaceado*<sup>2</sup>, es un método Tetrapolar, que utiliza 16 electrodos, divididos en un grupo de ocho que conducen la corriente y otro grupo de ocho que miden las tensiones. En la figura 4, se muestra la disposición de ambos grupos cuya forma de ordenar los electrodos proviene el nombre *interlaceado*. La principal desventaja de este método que para un número dado de electrodos se reduce el número de medidas independientes que se pueden obtener en comparación con el método *adyacente*. Por ejemplo para  $L = 16$  se tienen 104 medidas independiente en *adyacente*  $(L(L-3)/2)$ , mientras que en éste sólo contamos con 49  $(L(L-1))$  medidas independientes de las 64  $(L/2)^2$  que se podrían realizar. Esto resulta en una disminución de la resolución en la imagen. Por otro lado se observa que en esta configuración se mide entre dos electrodos que conducen corriente, ver figura 3. Estas medidas corresponden a la zona donde se tiene una mayor variación del gradiente del campo eléctrico, por lo que pequeños desplazamientos en los electrodos se traducen en grandes variaciones en las medidas.

---

<sup>2</sup> Del inglés: Interleaved

## IMPETOM I

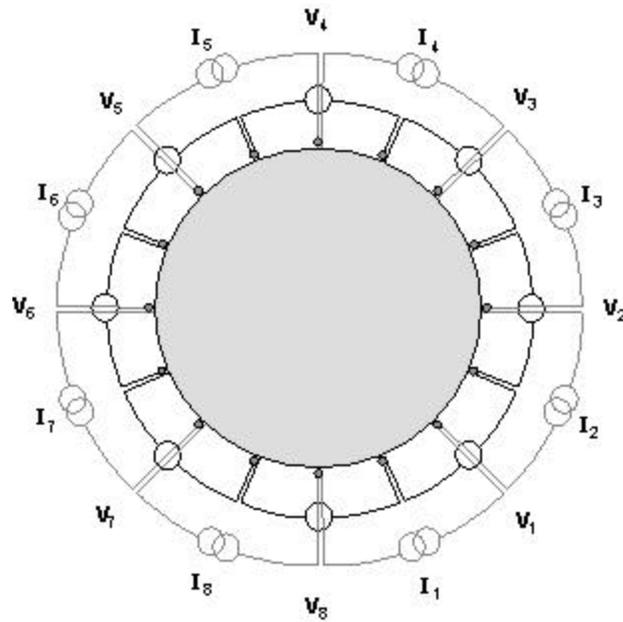


Figura 4 Estrategia de medida Tetrapolar Interlaceado. Tomado de [1]

### 3.3 Métodos de Reconstrucción de Imágenes

En la práctica las técnicas de reconstrucción pueden dividirse en dos tipos:

- *Técnicas Iterativas*  
Utilizan operaciones repetitivas que en cada paso mejoran la imagen.  
Intenta una reconstrucción de la distribución de conductividades absoluta teniendo en cuenta la ausencia de linealidad del problema.
- *Técnicas de un solo paso.*  
Reconstrucción basada en la linealización del problema inverso obteniendo una solución que corresponde a la variación de conductividades respecto a una distribución de referencia, con menos cálculos *on line*.

En los capítulos 4 y 5 se analizan en detalle estas técnicas y la decisión de diseño se encuentran en los capítulos 7, 8 y 9.

### 3.4 Decisiones de proyecto de IMPETOM-I

Después de revisar los distintos métodos y a la hora de elegir la estrategia de medida a emplear se acordó conjuntamente con el grupo IMPETOM-C descartar el Método de las Corrientes Óptimas debido a la complejidad en la circuitería. En cuanto a los métodos tetrapolares, en el caso del Método de Oposición no es compatible con el algoritmo de Back Projection (ver más adelante), debido a la dificultad en obtener las proyecciones en la reconstrucción. Encontramos el método adyacente como el más apropiado para ser utilizado en las técnicas de reconstrucción a ser implementadas.

## IMPETOM I

El número de electrodos fue acordado con IMPETOM-C, en 16 debido a que la totalidad de los trabajos leídos menos en los que refieren a corrientes óptimas utilizan 16 electrodos. Un número mayor de electrodos incrementa la complejidad del instrumento y por otra parte importa la poca practicidad que resulta de un número grande de electrodos alrededor del paciente.

## 4 Métodos de Reconstrucción Iterativos

### 4.1 Método de las Perturbaciones

El método de las perturbaciones es una técnica iterativa basada en la aplicación de un patrón de voltajes conocido y medida de las corrientes generadas. Se utiliza el Método de los elementos Finitos (FEM) para resolver el problema directo en cada iteración y la matriz de Perturbación (forma lineal de la relación de sensibilidad) para corregir y estimar la distribución de conductividades. Según Metherall [1] esta técnica fue propuesta originalmente por Kim et al (1983).

Inicialmente asume una distribución de conductividad uniforme, el proceso iterativo calcula una nueva estimación de la conductividad mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{c_i^n} = \frac{1}{c_i^{n-1}} + K \sum_{j=1}^M \frac{Rc_j^n T_{ij}}{\sum_{k=1}^M |T_{ik}|} \frac{1}{c_i^{n-1}} \quad \text{Ec. 4.1}$$

donde  $c_i^n$  y  $c_i^{n-1}$  son la conductividad del  $i^{\text{esimo}}$  elemento después de la  $n^{\text{esima}}$  y  $(n-1)^{\text{esima}}$  iteración respectivamente,  $K$  es un factor de convergencia y  $Rc_j^n$  es la diferencia porcentual entre la densidad de conductividad predicha (del cálculo con FEM) y la actual (medida) en el  $j^{\text{esimo}}$  electrodo en la  $n^{\text{esima}}$  iteración.

$M$  es el número total de medidas de corrientes en los electrodos.

Existen variaciones de este algoritmo, en particular dado que la matriz de Perturbaciones  $T$ , es una función de la distribución de conductividades, dicha matriz se puede recalculer en cada iteración logrando mejoras en la reconstrucción.

De este método solo se conocen reconstrucciones con datos simulados o con datos provenientes de fantasmas.

## 4.2 Método del Doble Condicionamiento

El método del Doble Condicionamiento (“Double Constraint” en inglés) fue desarrollado por Wexler et al (1985). Es una técnica iterativa que parte de una distribución de conductividad inicial uniforme. En cada iteración resuelve el problema directo utilizando elementos finitos (FEM) y aplicando las condiciones de borde de Neumann y las combinadas. En el primer paso del algoritmo se calculan los voltajes internos y de la frontera para los patrones de corriente inyectados utilizando la distribución de conductividad calculada en el paso anterior. Se calcula la densidad de corriente,  $J$ , para cada elemento por la ley de Ohm:

$$J = c_i E \quad \text{Ec. 4.2}$$

$$E = -\nabla\Phi \quad \text{Ec. 4.3}$$

En el segundo paso se calcula nuevamente la distribución de potencial pero en este caso utilizando las medidas reales de potencial sobre la superficie para “forzar” la solución. Esto tiende a mejorar la exactitud de la estimación de los potenciales internos. Dado que la distribución inicial de conductividad  $c_i$  no es la correcta, existirá una diferencia entre los gradientes de voltajes calculados entre el primer y segundo paso, por lo tanto

$$J + c_i \nabla\Phi \neq 0 \quad \text{Ec. 4.4}$$

El objetivo de esta técnica es ajustar en cada iteración la distribución de conductividades hasta minimizar el error cuadrático entre las dos soluciones. Esto es para minimizar:

$$e(c) = \sum_i \int_{v_i} [J + c_i \nabla\Phi][J + c_i \nabla\Phi] dv \quad \text{Ec. 4.5}$$

Donde:

- $e(c)$  *es la suma de los cuadrados de los errores residuales*
- $v_i$  *identifica la integral en el volumen del elemento  $i$*
- $J$  *es la densidad de corriente eléctrica en el elemento  $i$  obtenida resolviendo las condiciones de borde de Neumann.*
- $-c_i \nabla\Phi$  *es la densidad de corriente eléctrica en el elemento  $i$  obtenida resolviendo las condiciones de borde combinadas.*

Derivando la Ec 4.5 respecto a la conductividad e igualándola a cero podemos despejar  $c_i$  (valor de conductividad actualizado del elemento  $i$ ).

$$c_i = \frac{-\int_{v_i} J \cdot \nabla\Phi dv}{\int_{v_i} \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi dv} \quad \text{Ec. 4.6}$$

La convergencia está determinada por la comparación entre las diferencias de potencial calculadas sobre la superficie en el primer paso y los voltajes medidos hasta llegar a un valor menor que la tolerancia pre-establecida.

La actualización del valor de la conductividad no involucra cálculos con matrices mal condicionadas pero para producir una imagen razonable según Wexler, (1988) es necesario un gran número de iteraciones.

### 4.3 Método Newton-Raphson Modificado

Este método utiliza elementos finitos y el método iterativo de Newton-Raphson modificado para calcular la distribución de resistividad.

El operador  $h$  describe la relación entre los voltajes de la superficie  $V$  y la resistividad  $\rho$ :

$$V = h(\mathbf{r}) \quad \text{Ec. 4.7}$$

El error cuadrático  $e(\mathbf{r})$  entre los valores calculados mediante la ecuación anterior y los voltajes medidos  $V_0$  se define como:

$$e(\mathbf{r}) = \|V_0 - h(\mathbf{r})\|_2 \quad \text{Ec. 4.8}$$

$$e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [V_0 - h(\mathbf{r})]^T [V_0 - h(\mathbf{r})] \quad \text{Ec. 4.9}$$

Minimizando dicho error respecto a la resistividad  $\rho$  obtenemos:

$$e'(\mathbf{r}) = -[h'(\mathbf{r})]^T [V_0 - h(\mathbf{r})] = 0 \quad \text{Ec. 4.10}$$

Donde  $h'(\mathbf{r})_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{r}_j}$  es el Jacobiano de  $h$ .

Aproximando por Taylor en el punto  $\rho = \rho^k$  la derivada del error, despreciando los términos no lineales, entorno a  $\rho^k$ :

$$e'(\mathbf{r}) \approx e'(\mathbf{r}^k) + e''(\mathbf{r}^k) \Delta \mathbf{r}^k \quad \text{Ec. 4.11}$$

Donde:

$$\Delta \mathbf{r}^k = \mathbf{r} - \mathbf{r}^k \quad \text{Ec. 4.12}$$

Trabajando con el término  $e''(\rho^k)$ :

$$e''(\mathbf{r}^k) = [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] - \sum_{l=1}^M (V_0^l - h_l(\mathbf{r}^k)) \frac{\partial^2 h_l}{\partial \mathbf{r}^2}(\mathbf{r}^k) \quad \text{Ec. 4.13}$$

Debido a que tratamos de minimizar la distancia entre  $h(\mathbf{r})$  y  $V_0$ , resulta que el segundo término es sensiblemente menor que el primero:

$$e''(\mathbf{r}^k) \approx [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] \quad \text{Ec. 4.14}$$

De este modo se puede expresar  $e'(\rho^k)$ :

$$\begin{aligned} e'(\mathbf{r}^k) &= -[h'(\mathbf{r}^k)]^T [V_0 - h(\mathbf{r}^k)] + [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] \Delta \mathbf{r}^k \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 4.15}$$

Despejando  $\Delta \mathbf{r}^k$  de la ecuación anterior:

$$\Delta \mathbf{r}^k = \left\{ [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] \right\}^{-1} [h'(\mathbf{r}^k)]^T [V_0 - h(\mathbf{r}^k)] \quad \text{Ec. 4.16}$$

Donde  $\Delta \mathbf{r}^k$  es el error en la k-ésima iteración,  $\mathbf{r}^{k+1}$  resulta:

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \left\{ [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] \right\}^{-1} [h'(\mathbf{r}^k)]^T [V_0 - h(\mathbf{r}^k)] \quad \text{Ec. 4.17}$$

El Jacobiano se calcula en cada iteración por lo tanto es necesaria una implementación eficiente del método de Elementos Finitos para calcular  $h$  y el Jacobiano.

El principal problema asociado a este algoritmo es la inversión de la siguiente matriz:

$$[h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] \quad \text{Ec. 4.18}$$

Dicha matriz se caracteriza por ser mal condicionada por lo tanto son necesarias técnicas de regularización para poder reconstruir imágenes a partir de datos reales los cuales estarán afectados por errores de medición.

Un posible método es el Método de Levenberg-Marquardt, que es una variación en la iteración de Newton. Para lograr dicha regularización agrega un término a la ecuación a regularizar:

$$e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [V_0 - h(\mathbf{r})]^T [V_0 - h(\mathbf{r})] + \mathbf{a} \mathbf{r}^T R \mathbf{r} \quad \text{Ec. 4.19}$$

Donde  $\mathbf{a}$  es un escalar y  $R$  es una matriz definida positiva. La expresión a ser invertida (Ec. 4.11) ahora incluye un término adicional y esto contribuye a mejorar el condicionamiento de la matriz. En el capítulo 9 dedicado a la implementación de este método se tratará más detalladamente este punto.

Muchos grupos de investigación han utilizado el método iterativo de Newton-Raphson de un solo paso, tal es el caso de Cheney (1990) que desarrolló el algoritmo NOSER (Newton One Step Error Reconstruction) en el cual la Matriz del Jacobiano es calculada previo a la reconstrucción y luego guardada para ser utilizada en las diferentes reconstrucciones.

Este método logra reconstruir imágenes en un menor tiempo a costa de perder exactitud.

En el caso de reconstrucciones de imágenes "In Vivo" de tórax humanos produce distorsiones y las regiones pulmonares pueden ser identificadas solamente cerca de la frontera, o sea próximo a la piel del paciente.

## 5 Métodos de Reconstrucción de un solo Paso

Los métodos de un solo paso generan una imagen utilizando una única operación matemática. Son rápidos y robustos y en general trabajan con imágenes dinámicas.

En principio, dado que estas técnicas están determinadas por operadores lineales invariables, se pueden representar como una multiplicación de un vector de medidas de voltaje por una matriz que representa el operador de la reconstrucción.

A pesar de la simplicidad de la formulación, la búsqueda de los coeficientes de dicha matriz no es fácil. Existen varios tipos de métodos de un solo paso, que se dividen básicamente en dos grupos:

- *Matriz de Sensibilidad*
- *Back-projection (retro-proyección)*

Se puede demostrar que ambas técnicas son equivalentes, aunque históricamente hayan tenido un desarrollo diferente.

### 5.1 Método Newton de un solo paso: NOSER

Es una técnica de un solo paso que utiliza la Matriz de sensibilidad (5.3) formulada de una forma diferente. Es una técnica muy usada para imágenes estáticas, utiliza la primer iteración del método de Newton-Raphson (4.3). Aunque está basada en el método de Newton-Raphson, es una técnica lineal de un solo paso.[2]

### 5.2 Método Capa a Capa

En el método Capa a Capa (en inglés “Layer Stripping”) se utilizan corrientes óptimas para facilitar el problema directo que se caracteriza por ser un problema no lineal. Esta técnica calcula en primer término la conductividad en la frontera de un disco o esfera de radio  $r_0$  y luego a partir de esta información estima el potencial en un radio  $(r_0 - \Delta r)$ . Utilizando estos datos, se repite el proceso y la distribución de conductividad es obtenida capa a capa (Layer Stripping).

## IMPETOM I

Al cuerpo se le aplican corrientes óptimas en baja y alta frecuencia. Las bajas frecuencias logran penetrar más profundamente en el cuerpo mientras que las altas se limitan a las capas más superficiales.

Asumimos que se le aplica una corriente a la región de interés. Utilizando los valores de potencial medidos en la región se puede calcular el valor de las resistividades  $R$ .

Extendiendo esta definición de  $R$  para todo valor de  $r$ :

$$R(r) \left[ \mathbf{s}(r, \mathbf{q}) \frac{\partial u(r, \mathbf{q})}{\partial r} \right] = u(r, \mathbf{q}) \quad \text{Ec. 5.1}$$

donde  $\frac{\partial u(r, \mathbf{q})}{\partial r}$  es la componente radial de la densidad de corriente.

$u$  son las medidas de voltaje sobre la superficie

$R$  es la resistividad

$\mathbf{s}(r, \mathbf{q})$  es la conductividad

Los pasos del método son los siguientes:

Realizar las medidas  $R(r_0)$  sobre la superficie del cuerpo.

Calcular la conductividad en la superficie utilizando la siguiente fórmula:

$$\mathbf{s}(r, \mathbf{q}) = \frac{V_{\mathbf{q} \text{ PARA EL CASO HOMOGÉNEO}}}{V_{\mathbf{q} \text{ CALCULADO PARA } R}} \quad \text{Ec. 5.2}$$

Estos voltajes ( $V_\theta$ ) corresponden a los calculados a altas frecuencias dado que son los más sensibles a cambios cerca de la superficie.

Primero se calculan los valores para la capa interior con radio  $r_0 - \Delta r$ , luego se propaga  $R$  dentro del interior utilizando la fórmula:

$$R(r_0 - \Delta r) = R(r_0) - \Delta r \frac{\partial R}{\partial r} \quad \text{Ec. 5.3}$$

donde  $\frac{\partial R}{\partial r}$  se desarrolla por Taylor:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{\mathbf{s}} + \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) R \quad \text{Ec. 5.4}$$

Finalmente se reemplaza  $r_0$  por  $(r_0 - r)$  y se repite desde el comienzo.

Dado que la reconstrucción avanza hacia el interior, los coeficientes en  $R$  asociados a las altas frecuencias son progresivamente eliminados dado que contienen información muy limitada acerca de la región central.

Es un método directo que obtiene una solución aproximada del problema no lineal. Requiere menor procesamiento y almacenamiento de datos que los métodos iterativos. Las imágenes obtenidas reconstruyendo datos reales son de mala calidad. Dicho comportamiento se puede atribuir a que este método introduce más inestabilidad a un problema ya mal condicionado.

### 5.3 Método de la Matriz de Sensibilidad

#### 5.3.1 La relación de Sensibilidad

Se considera el Teorema de la divergencia de Gauss en una región arbitraria cerrada  $\Omega$  con frontera  $\Gamma$ . Dada una función vectorial continua  $G$  en  $\Omega$  tenemos:

$$\int_{\Gamma} G \cdot ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot G dv \quad \text{Ec. 5.5}$$

Si consideramos dos funciones escalares cualquiera  $\Phi$  y  $\Psi$  reemplazamos  $G$  por  $\Phi \nabla \Psi$ , desarrollando obtenemos:

$$\int_{\Gamma} \Phi \nabla \Psi \cdot ds = \int_{\Omega} \Phi \nabla \cdot (\nabla \Psi) dv + \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi dv \quad \text{Ec. 5.6}$$

Sustituyendo ahora  $\nabla \Psi$  por  $\mathbf{s} \nabla \Psi$ , y definiendo  $\Psi$  como una solución de la Ec. 3.10, por lo que  $\nabla \cdot (\mathbf{s} \nabla \Psi) = 0$

$$\int_{\Gamma} \Phi \mathbf{s} \nabla \Psi \cdot ds = \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi dv \quad \text{Ec. 5.7}$$

#### *Principio de Reciprocidad*

Al inyectar una corriente unitaria  $I$  dentro de una región  $\Omega$  a través de los electrodos a-b, el voltaje  $g$  medido entre los electrodos c-d será el mismo que el medido entre los electrodos a-b cuando una corriente unitaria  $I$  es inyectada entre los electrodos c-d. A esta propiedad se le llama Principio de Reciprocidad

Considerar la región mostrada en la figura 5. Cuando la corriente  $I_{\Psi}$  es inyectada en la región  $\Omega$  a través de los electrodos a -b, se establece una distribución de potencial  $\Psi$  dentro de la región y sobre la frontera  $\Gamma$ .

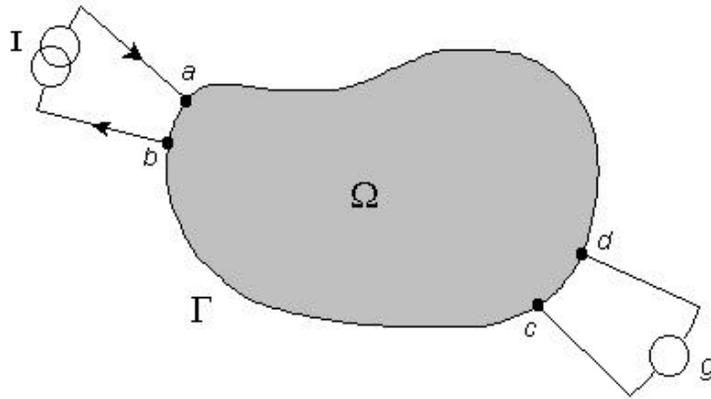


Figura 5 Modelo de la región a analizar

Sobre los electrodos c-d se realiza una medida de voltaje. La conductividad isotrópica interna de  $\Omega$  es  $\sigma$  mientras que la región que rodea al cuerpo tiene una conductividad nula.

Considerando las Ec. 3.5 y 3.8 obtenemos:

$$J = -\mathbf{s}\nabla\Phi \quad \text{Ec. 5.8}$$

obtenemos que  $\mathbf{s}\nabla\Phi$  es simplemente el opuesto de la densidad de corriente.

Como  $\Omega$  está rodeado por una región no-conductora, la integral de superficie será igual a cero salvo en los puntos donde se ubican los electrodos por los cuales se inyecta la corriente  $I_\Phi$ .

La integral de superficie para este caso queda de la forma:

$$\int_{\Gamma} \Phi \mathbf{s}\nabla\Phi \cdot d\mathbf{s} = I_y (\Phi_a - \Phi_b) = I_y \Phi_{ab} \quad \text{Ec. 5.9}$$

Realizando un análisis similar, si  $\Psi$  es solución de la ecuación 3.5 cuando se inyecta una corriente  $I_\Psi$  a través de los electrodos c-d, la integral sobre  $\Gamma$  de la ecuación 5.9 será igual a

$$I_\Psi \Psi_{cd} \text{ y entonces } I_\Phi \Psi_{cd} = I_y \Phi_{ab}.$$

Si asumimos que en ambos casos la corriente inyectada es igual a la unidad:

$$\int_{\Omega} \mathbf{s}\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi \, dv = \Phi_{ab} = \Psi_{cd} = g \quad \text{Ec. 5.10}$$

donde  $g$  es la medida de voltaje según muestra la figura 5. Este resultado permite formular el siguiente principio.

La última ecuación, (Ec. 5.10) es un resultado importante en EIT dado que describe la relación entre las medidas de voltaje sobre la superficie y la distribución de conductividad. Es importante notar que dicha relación es no-lineal debido a que  $\nabla\Phi$  y  $\nabla\Psi$  son también funciones de  $\mathbf{s}$ .

Ahora se considera la distribución de conductividad general y las medidas de voltaje asociadas en términos de distribución de conductividad uniforme y perturbada:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_u + \mathbf{s}_p \quad \text{Ec. 5.11}$$

$$g = g_u + g_p \quad \text{Ec. 5.12}$$

$$\nabla\Phi = \nabla\Phi_u + \nabla\Phi_p \quad \text{Ec. 5.13}$$

$$\nabla\Psi = \nabla\Psi_u + \nabla\Psi_p \quad \text{Ec. 5.14}$$

Expandiendo la ecuación 5.10 se llega a:

$$g = \int_{\Omega} (\mathbf{s}_u + \mathbf{s}_p) (\nabla\Phi_u + \nabla\Phi_p) \cdot (\nabla\Psi_u + \nabla\Psi_p) dv \quad \text{Ec. 5.15}$$

Asumiendo que la corriente que se le aplica a la región  $\Omega$  es constante y aplicando la ecuación derivada del apéndice A se llega a:

$$g = \int_{\Omega} \mathbf{s}_u \nabla\Phi_u \cdot \nabla\Psi_u dv - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla\Phi_u \cdot \nabla\Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla\Phi_p \cdot \nabla\Psi_p dv \quad \text{Ec. 5.16}$$

Como:

$$g_u = \int_{\Omega} \mathbf{s}_u \nabla\mathbf{f}_u \cdot \nabla\Psi_u dv \quad \text{Ec. 5.17}$$

Por lo tanto:

$$g_p = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla\mathbf{f}_u \cdot \nabla\Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla\mathbf{f}_p \cdot \nabla\Psi_p dv \quad \text{Ec. 5.18}$$

Utilizando la siguiente igualdad (Barber 1990)

$$\int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla\mathbf{f}_p \cdot \nabla\Psi_p dv = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla\mathbf{f}_u \cdot \nabla\Psi_p dv \quad \text{Ec. 5.19}$$

la ecuación 5.18 queda de la siguiente forma:

$$g_p = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla\mathbf{f}_u \cdot \nabla\Psi_u dv - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla\mathbf{f}_u \cdot \nabla\Psi_p dv \quad \text{Ec. 5.20}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 5.14:

$$g_p = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla\mathbf{f}_u \cdot \nabla\Psi dv \quad \text{Ec. 5.21}$$

Esta ecuación es conocida como la Relación de Geselowitz.

Si la perturbación de la conductividad  $\mathbf{s}_p$  es pequeña, entonces  $\nabla\Psi_p \ll \nabla\Psi_u$  por lo tanto el segundo término de la ecuación 5.20 puede ser despreciado.

Por lo que la relación de sensibilidad puede ser expresada como:

$$g_p = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \cdot \nabla \Phi_u \cdot \nabla \Psi_u \, dv \quad \text{Ec. 5.22}$$

Llegando así a la Relación de Sensibilidad Linealizada.

### 5.3.2 La Matriz de Sensibilidad Linealizada

Si se divide la región  $\Omega$  en un número discreto de elementos con conductividad uniforme, se puede representar la ecuación 5.22 como un conjunto de ecuaciones lineales. Escribiéndolo en forma matricial se llega a:

$$g_p = SC_p \quad \text{Ec. 5.23}$$

Donde  $g_p$  es un vector con los cambios en los datos de medida de voltajes,  $C_p$  es el vector de conductividad discretizada y  $S$  es la Matriz de sensibilidad cuyos coeficientes se calculan con la siguiente fórmula:

$$S_{ij} = - \int_{j^{\text{esimo elemento}}} \nabla \Phi_u \cdot \nabla \Psi_u \, dv \quad \text{Ec. 5.24}$$

Donde  $i$  corresponde a la  $i^{\text{esima}}$  combinación de electrodo de inyección de corriente y electrodo de medida de voltaje,  $j$  corresponde al  $j^{\text{esimo}}$  elemento y la integración es sobre un diferencial de volumen.

Dada la linealidad se puede obtener la distribución de conductividad  $C_p$  invirtiendo la Matriz de Sensibilidad:

$$C_p = S^{-1} g_p \quad \text{Ec. 5.25}$$

Por lo tanto dadas las medidas de voltaje sobre la superficie,  $g_p$  se puede calcular la imagen de la perturbación de la conductividad  $C_p$ . Este resultado es válido para regiones sin importar su dimensión ni configuración de electrodos, pero la ubicación y configuración de los pares de electrodos afectan la estabilidad de la inversión de la matriz y por lo tanto la calidad de la reconstrucción. Según la bibliografía consultada [1] se logra reducir el efecto de la ubicación y configuración de los electrodos mediante la normalización de la matriz  $S$ .

Para la relación normalizada, se sustituye  $S$  por la Matriz de Sensibilidad Normalizada  $F$  obteniendo:

$$C_n = F^{-1} g_n \quad \text{Ec. 5.26}$$

Para poder obtener  $C_n$  a partir de  $g_n$ , primero es necesario calcular la Matriz de Sensibilidad Normalizada dependiendo de la configuración de electrodos utilizada y luego encontrar una inversión estable de dicha matriz.

### 5.3.3 Formulación de la Matriz de Sensibilidad Normalizada

La formulación de la Matriz de Sensibilidad Normalizada se puede dividir en los siguientes pasos:

## IMPETOM I

- I. Dividir la región de trabajo en un número discreto de elementos (Grilla)
- II. Calcular el gradiente de voltaje en cada elemento suponiendo que una corriente unitaria pasa por cada uno de los pares de electrodos de corriente correspondiente al método de medida seleccionado.
- III. Utilizando estos valores de potencial, calcular los coeficientes de la matriz de sensibilidad para cada combinación de electrodos de inyección y electrodos de medidas en cada elemento.
- IV. Guardar estos coeficientes en forma matricial, normalizarla y así se obtiene la matriz F

En muchos trabajos se ha utilizado el Teorema de la Sensibilidad de Geselowitz (1971), para reconstruir la imagen.

Yamáshita y Takashashi (1981), utilizaron el Método de Elementos Finitos (FEM) para obtener una Matriz de Sensibilidad linealizada representativa del tórax humano. Al obtener dicha matriz notaron su mal condicionamiento por lo que fue necesario regularizarla para poder invertirla obteniendo una solución estable. Análisis numéricos de dicha técnica revelaron que la aproximación lineal fue válida para cambios de conductividad menores de 30%.

Nakayama *et al* (1981) implementó un algoritmo iterativo lineal asumiendo cambios pequeños de conductividad. En reconstrucciones simuladas de una sola iteración encontró variaciones en la exactitud del algoritmo según la región, el comportamiento resultó mejor en los bordes.

Murai y Kagawa (1985) también propusieron un método iterativo basado en el teorema de Geselowitz en el cual relacionan los cambios en la impedancia de transferencia ( $\Delta Z$ ) medida en la superficie, con los cambios en la conductividad ( $\Delta c$ ):

$$\Delta Z = S \Delta c \quad \text{Ec. 5.27}$$

en el cual  $S$ , la Matriz de Sensibilidad se calcula para una conductividad dada.

Comparando los valores de la impedancia de transferencia ( $Z$ ) con los medidos ( $Z_m$ ):

$$\Delta Z = (Z_m - Z) = S \Delta c \quad \text{Ec. 5.28}$$

Invirtiendo la matriz  $S$ , calcularon el vector  $\Delta c$  y lo utilizaron para actualizar el valor de la conductividad iterando hasta obtener la solución.

Yorkey *et al* (1987), notaron que el Método de la Matriz de Sensibilidad linealizada era similar al algoritmo de Newton-Raphson, dado que la matriz  $S$  es igual al Jacobiano. Además los métodos no iterativos pueden ser considerados equivalentes a la primera iteración de un proceso más general y todos ellos necesitan la regularización de una matriz mal condicionada.

Barber y Brown (1988), puntualizaron que inversiones estables de dichas matrices no garantizan buenas reconstrucciones dado que la Matriz de Sensibilidad debe ser calculada con una geometría idéntica a la utilizada en la recolección de los datos, que no es el caso de las aplicaciones médicas, lo que representa un problema significativo. Barber y Brown también demostraron que pequeñas variaciones de posición de los electrodos pueden resultar en grandes errores en la imagen reconstruida. Por esta razón modificaron el algoritmo de reconstrucción normalizando la ecuación ( $g_p = S c_p$ ) con un conjunto de datos de referencia.

Si dicho conjunto de datos utilizado para normalizar los cambios de los voltajes en la frontera corresponde a datos medidos previamente a los cambios en la conductividad, notaron que la reconstrucción se torna insensible a desviaciones de la geometría y los errores tienden a cancelarse. La consecuencia de esta estrategia es que las reconstrucciones producen imágenes

diferenciales en lugar de producir imágenes estáticas y solo cambios normalizados en la conductividad pueden ser determinados.

Esta modificación simple y muy efectiva es probablemente la principal razón por la cual el método de Barber y Brown es la técnica más exitosa para reconstruir imágenes “In Vivo”. Utilizando una estrategia de datos con normalización similar, Kotre (1989,1994), ha realizado varios estudios utilizando el método de la Matriz de Sensibilidad. En lugar de normalizar la matriz, con el conjunto de datos de referencia uniforme, normaliza cada columna de la matriz (correspondiente a cada pixel) con la suma de los coeficientes para todos los pares de electrodos.

$$S'_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sum_{i=1}^N S_{ij}} \quad \text{Ec. 5.29}$$

*i*        *corresponde a un par de electrodos en particular*  
*j*        *corresponde a un píxel en particular*  
*N*        *número de electrodos*

Resultados obtenidos tanto con datos reales o calculados demuestran que este método funciona correctamente aunque no exista una fundamentación teórica.

En el caso práctico, la sumatoria incluye las medidas de todos los electrodos, incluyendo los que contienen los electrodos de corriente, en los cuales es imposible obtener una medida de voltaje por lo que en la sumatoria dichos valores se sustituyen por cero.

## 5.4 Método de retroproyección

### 5.4.1 Introducción

El método de reconstrucción por retroproyección (del inglés *Back Projection*) se halla actualmente muy extendido entre los trabajos sobre la tomografía por impedancia eléctrica. Este algoritmo de un solo paso fue inicialmente desarrollado por Barber et al (1983), y re formulado por Barber (1990) en la Universidad de Sheffield. Muchos grupos han implementado dicho método y la mayoría de ellos han utilizado la estrategia de medida de voltaje adyacente (ver capítulo 2). En este capítulo explicaremos las bases teóricas del método que sustentarán su implementación práctica en el capítulo 8.

### 5.4.2 Distribución del potencial dentro de un medio resistivo isotrópico

El problema teórico a analizar aquí es la reconstrucción de una distribución de resistividad dentro de una región circular en 2D rodeada por un medio de resistencia infinita. Mientras que en la figura 6 se observa una configuración de electrodos de medida real sobre una curva “irregular”, la figura 7 muestra una idealización de dicha configuración logrando una ubicación de los electrodos equiespaciada en un círculo.

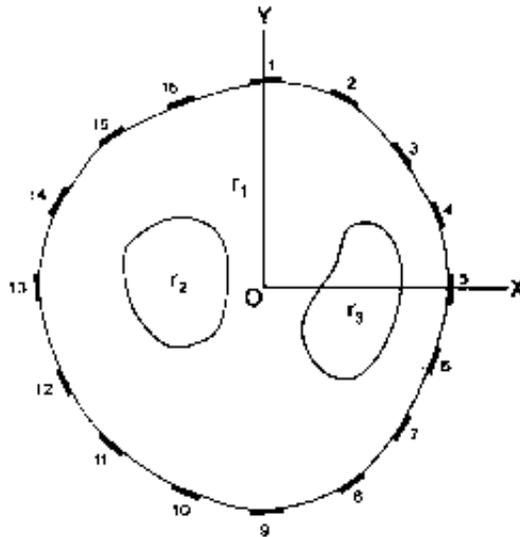


Figura 6 Disposición de los electrodos en un caso real



Figura 7 Disposición idealizada de los electrodos

Cuando se hace circular corriente por un par de electrodos (electrodos de inyección de corriente) produce una circulación de corriente por toda la región.

La distribución de voltajes dentro de dicha región se obtiene resolviendo la siguiente ecuación:

$$c \cdot \nabla^2 V + \nabla c \cdot \nabla V = 0 \quad \text{Ec. 5.30}$$

Donde  $c = c(x, y)$  es la distribución de conductividad dentro de la región.

Es conveniente reemplazar  $c$  por  $R$  donde  $R = -\log(c)$  (conductividad logarítmica) por lo que la ecuación anterior se transforma en:

$$\nabla^2 V = \nabla R \cdot \nabla V \quad \text{Ec. 5.31}$$

La ecuación 5.31 representa una relación no lineal entre  $V$  y  $R$  debido al  $\nabla V$  del lado derecho de la ecuación. Resolviendo esta ecuación se logra construir la imagen de la conductividad

logarítmica. Para el caso que la conductividad dentro de la región sea uniforme la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{Ec. 5.32}$$

Para una corriente que fluye a través de un par de electrodos particulares, los voltajes que se generan sobre la frontera de la región dependen de la distribución de conductividades dentro de esta. Pero las medidas generadas por un determinado par de electrodos de inyección de corriente no proveen información suficiente como para reconstruir dicha distribución, por lo que es necesario obtener medidas generadas por la inyección de corriente por otros pares de electrodos. El conjunto de medidas resultante permitirá una reconstrucción aproximada de la distribución de conductividad.

Para avanzar en el desarrollo del método suponemos una solución a esta ecuación de la forma:

$$V = V_p + V_u \quad \text{Ec. 5.33}$$

Donde  $V_u$  es una solución de la ecuación de Laplace, es decir una solución cuando la conductividad es homogénea. Sustituyendo esta solución en la ecuación 5.31 y dado que  $\nabla^2 V_u = 0$  se obtiene:

$$\nabla^2 V_p = \nabla R \cdot \nabla V_p + \nabla R \cdot \nabla V_u \quad \text{Ec. 5.34}$$

Si además  $\nabla R$  pequeño se puede asumir que  $\nabla V_p \ll \nabla V_u$  entonces la ecuación se simplifica, quedando:

$$\nabla^2 V_p = \nabla R \cdot \nabla V_u \quad \text{Ec. 5.35}$$

que constituye una relación lineal entre  $V_p$  y  $R$ . Para la  $i^{\text{ésima}}$  corriente aplicada:

$$\nabla^2 V_p(i) = \nabla R \cdot \nabla V_u(i) \quad \text{Ec. 5.36}$$

Así se forma un sistema de ecuaciones lineales que relacionan  $R$  con  $V_p(i)$ .

La reconstrucción de  $R$  requiere de la inversión de estas ecuaciones. La técnica de retroproyección (backprojection) aproxima dicha inversión.

### 5.4.3 Transformación de coordenadas

Para poder identificar la relación entre el perfil de voltajes sobre la frontera y la distribución de conductividad dentro de la región es necesario transformar el problema en un espacio más conveniente. Para ello impondremos la hipótesis simplificadora de que los pares de electrodos están infinitamente cercanos. En particular, los pares de inyección de corriente en cada medida se transforman en dipolos puntuales de corriente.

Con esta hipótesis es más sencilla la solución homogénea  $V_u$ . Se puede probar [6] que la distribución de potencial homogénea para una inyección modelada como un dipolo puntual de corriente implica equipotenciales circulares tangentes al dipolo y líneas de corriente también circulares y centradas en la recta que define la dirección del dipolo.

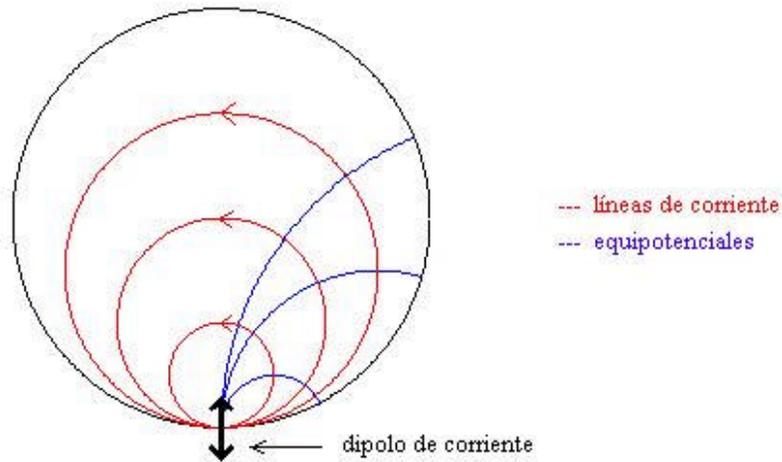


Figura 8 Equipotenciales y líneas de corriente para la inyección mediante un dipolo puntual de corriente

Este problema se puede convertir en un sistema de coordenadas más conveniente utilizando una transformación bilineal. La idea detrás de esta transformación es la de llevar el problema a un espacio en el que los ejes de coordenadas sean respectivamente paralelos a las equipotenciales y a las líneas de corriente.

La transformación apropiada se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{(u^2 + v^2)} & u &= \frac{x}{(x^2 + y^2)} \\ y &= \frac{v}{(u^2 + v^2)} & v &= \frac{y}{(x^2 + y^2)} \end{aligned} \quad \text{Ec. 5.37}$$

La primera de las expresiones lleva el eje de coordenadas de  $x$  sobre las equipotenciales y la segunda transforma el eje de coordenadas  $y$  sobre las líneas de corriente.

La segunda columna muestra la transformación inversa.

La figura 9 muestra los espacios  $x, y$  y  $u, v$  para la transformación.

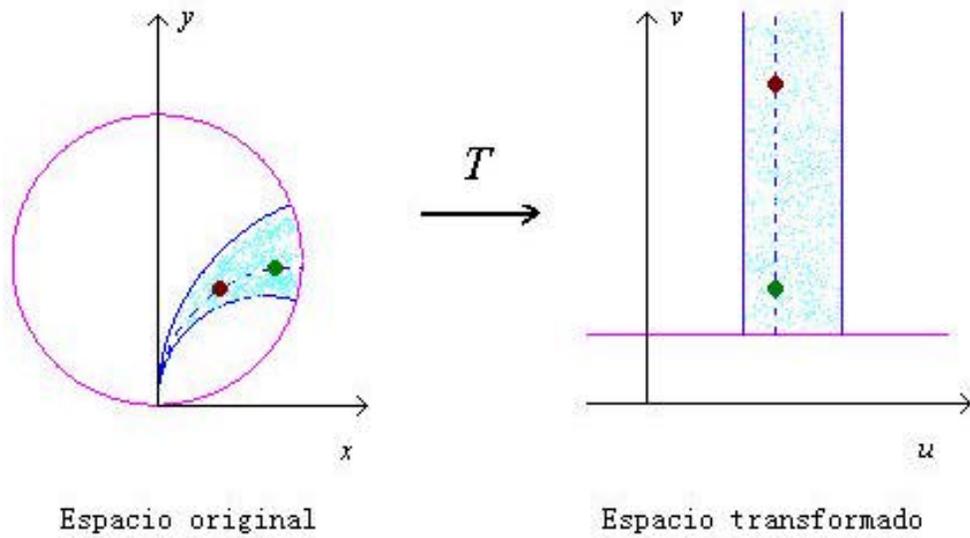


Figura 9 Transformación al espacio de equipotenciales y líneas de corriente

En general, la región circular se transforma en un semiplano, las líneas equipotenciales se transforman en rectas paralelas al eje  $v$  y las líneas de corriente en paralelas al eje de las  $u$ . En la figura 9 se identifican con igual color en los dos espacios los conjuntos homólogos correspondientes a la transformación  $T$  elegida. Así, la frontera de la región se transforma en una recta paralela al eje  $u$  (corresponde en definitiva a una línea de corriente) y las tres equipotenciales mostradas se transforman en semirrectas. Se muestra además la transformación de dos puntos mostrando cómo los más cercanos al dipolo se transforman en puntos más alejados del transformado de la frontera

#### 5.4.4 Fundamentación de la retroproyección

Según [6], al aplicar la transformación T la ecuación 5.34 no varía y se puede replantear de la siguiente forma en el espacio transformado:

$$\nabla^2 V_p = E \cdot \frac{dR}{du} \quad \text{Ec. 5.38}$$

Donde  $E = \frac{dV}{du}$  es constante, ya que  $u$  es la coordenada del potencial y además  $\frac{dV}{dv} = 0$ , ya que

las variaciones con respecto a  $v$  dejando  $u$  fija equivalen a desplazamientos sobre las equipotenciales.

La ecuación 5.31 es más fácil de resolver en el espacio  $u, v$  que en el espacio  $x, y$ .

Transformándola al espacio de frecuencias, con las variables  $(w_u, w_v)$  y definiendo:

$$\begin{aligned} v_p(w_u, w_v) & \text{ como la transformada de Fourier de } V_p \text{ y} \\ r(w_u, w_v) & \text{ como la transformada de Fourier de } R \text{ (recordar que } R = -\ln c) \end{aligned}$$

Entonces:

$$-(w_u^2 + w_v^2) \cdot v_p(w_u, w_v) = j \cdot E \cdot w_u \cdot r(w_u, w_v) \quad \text{Ec. 5.39}$$

De la ecuación anterior se deduce:

$$v_p(w_u, w_v) = -\frac{j \cdot r(w_u, w_v) \cdot E \cdot w_u}{(w_u^2 + w_v^2)} \quad \text{Ec. 5.40}$$

Definimos ahora  $G_p = \frac{\partial V_p}{\partial u}$  como el gradiente de la distribución de voltajes perturbado en la dirección de  $u$ , siendo su transformada de Fourier  $g_p = g_p(w_u, w_v)$ . Esta transformada se puede obtener multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por  $jw_u$ :

$$j \cdot w_u \cdot v_p(w_u, w_v) = \frac{r(w_u, w_v) \cdot E \cdot w_u^2}{(w_u^2 + w_v^2)} \quad \text{Ec. 5.41}$$

Es decir

$$g_p(w_u, w_v) = \frac{r(w_u, w_v) \cdot E \cdot w_u^2}{(w_u^2 + w_v^2)} \quad \text{Ec. 5.42}$$

La ecuación anterior muestra la relación entre el valor del gradiente en la dirección  $u$  del voltaje perturbado y la distribución de la resistividad logarítmica dentro del objeto.

De especial importancia es la evaluación de esos gradientes en la frontera de la región bajo estudio en el espacio transformado, es decir la recta  $v=v_b$ . Como se mencionó antes esta recta se

## IMPETOM I

antitransforma en la frontera de la región circular en el espacio original. De esta manera se arriba a una expresión que relaciona la distribución de resistividad dentro del objeto con la distribución de gradientes tangenciales en la frontera; las medidas de voltaje en el sistema real serán aproximaciones de esos gradientes

A continuación se traslada el origen de coordenadas en el espacio  $u, v$  de modo que el eje  $u$  coincida con la recta  $v=v_b$ , a los efectos de simplificar las cuentas. Luego de dicha traslación la transformada del perfil de gradientes en la frontera se obtiene al antitransformar la expresión de la ecuación 17 según  $w_v$  evaluando en  $v=0$ , con lo que resulta:

$$b_p(w_u) = E \int_0^{\infty} \frac{r(w_u, w_v) w_u^2}{(w_u^2 + w_v^2)} dw_v \quad \text{Ec. 5.43}$$

siendo  $b_p(w_u)$  el perfil transformado de gradientes de potencial sobre la frontera. De la ecuación anterior se puede concluir que los gradientes en la frontera siguen una relación lineal con la distribución de conductividades logarítmica  $R$ , debido a las hipótesis impuestas más arriba.

Aprovechando esa linealidad se estudiará la respuesta al impulso, en este caso un punto con una perturbación de conductividad infinita con respecto al resto uniforme.

Para simplificar ese punto se situará sobre el eje  $v$  a una distancia  $q$  del origen. La respuesta a puntos fuera del eje  $v$  se obtiene mediante la traslación apropiada en la dirección de  $u$ . Se asumirá además simetría especular sobre el eje  $u$  con lo que la transformada de esa perturbación puntual queda:

$$r(w_u, w_v) = \cos(w_v q) \quad \text{Ec. 5.44}$$

Sustituyendo en la ecuación 5.43 y realizando la integración se obtiene:

$$b_p(w_u) = \frac{P}{2} E w_u \exp(-q|w_u|) \quad \text{Ec. 5.45}$$

que es la transformada del perfil de gradientes en la frontera para una perturbación puntual en la discontinuidad. Antitransformando:

$$B_p(u) = E \frac{q^2 - u^2}{(q^2 + u^2)^2} \quad \text{Ec. 5.46}$$

En la figura 10 se grafica la respuesta sobre la frontera para perturbaciones de diferente profundidad

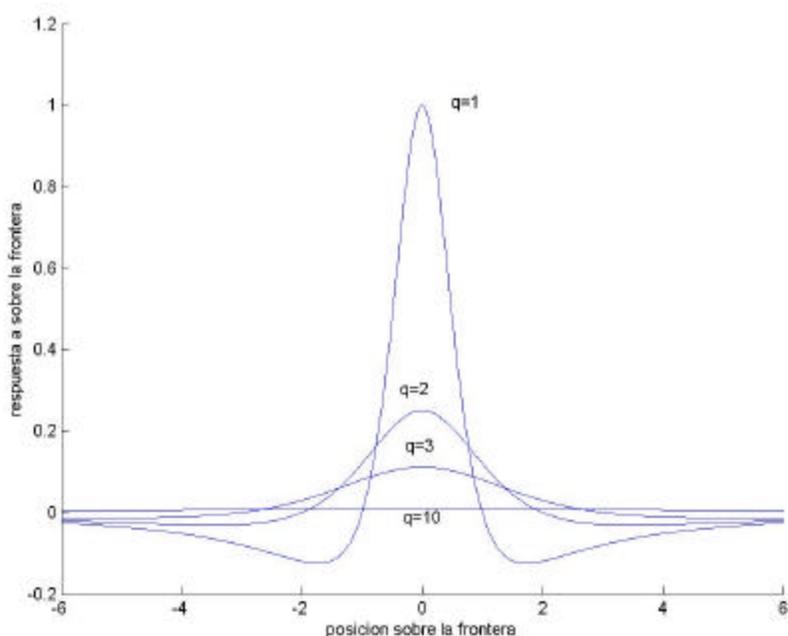


Figura 10 Respuesta en la frontera para perturbaciones puntuales de la conductividad de diferente profundidad (q).

De la figura 10 se pueden extraer algunas conclusiones:

- La influencia de la perturbación decae a cero rápidamente para puntos sobre la frontera alejados de la intersección de ésta con la equipotencial que pasa por el punto que presenta dicha perturbación.

Esta observación justifica la hipótesis hecha en la implementación de este método de que los cambios en el perfil de diferencias de potencial medidos entre electrodos se deben fundamentalmente a las perturbaciones en la conductividad en aquellos puntos tales que las equipotenciales que los atraviesan cruzan la frontera en la región de esos electrodos. De aquí, junto con la hipótesis de que las equipotenciales no varían mucho respecto a las creadas por una distribución uniforme, surge la idea de retroproyectar a lo largo de esas equipotenciales.

- La influencia sobre la frontera es dependiente de la distancia a la frontera del punto perturbado, siendo mayor para puntos más cercanos a la frontera que para puntos más alejados.

De esta otra observación se deduce la necesidad de implementación de filtrado que haga la respuesta menos dependiente de la posición espacial.

- De acuerdo al punto anterior y teniendo en cuenta la contribución de todas las medidas a la imagen total se puede concluir que los puntos del centro de la imagen son los que tienen menos influencia en la generación de los voltajes medidos. De esto surge que el método presente una baja resolución en puntos centrales de la figura.

Con esto concluye la presentación del marco teórico de la reconstrucción según el método de retroproyección. En el capítulo 8 se dan los detalles de implementación.

## 6 Regularización

En el siguiente capítulo se hará un estudio teórico de porqué se hace necesario regularizar y en qué consiste la regularización. Analizaremos distintas técnicas de regularización: el método de Tikhonov, el método de la varianza y el de Truncamiento (TSVD), así como también combinaciones de los mismos.

### 6.1 Necesidad de la Regularización

El problema directo de la EIT puede ser representado con un modelo matemático general de la forma:

$$z = h(\mathbf{q}) \tag{Ec. 6.1}$$

donde  $\theta \in \mathfrak{R}^N$  son las conductividades y  $z \in \mathfrak{R}^M$  el vector voltajes.

El operador  $h$  en el caso de la EIT no es lineal; sin embargo en muchos esquemas de reconstrucción se manejan modelos linealizados, para los que la ecuación anterior queda de la forma:

$$z = H\mathbf{q} , H \in \mathfrak{R}^{M \times N} \tag{Ec. 6.2}$$

En este caso si  $H$  y  $\theta$  son conocidas,  $z$  puede ser calculado resolviendo el problema. Este es el problema clásico directo que es a menudo estable y que tiene solución única.

En el problema inverso,  $z$  es medido (vector de observación) y el vector  $\theta$  es el parámetro a determinar.

Una característica muy frecuente en los problemas inversos es la de “*ill posed*”.

Esto implica que no preserva la estabilidad y unicidad para cualquier conjunto de datos arbitrarios según Polydorides [9]. Incluso si no se producen errores se hace difícil encontrar una solución estable para el problema. Por ejemplo cuando las medidas son simuladas con un modelo teórico se encuentra inestabilidad numérica. Como veremos más adelante esto tiene consecuencias importantes en las reconstrucciones en EIT.

Según [3], un problema es “*ill posed*” si cumple con las siguientes condiciones:

1. Los valores singulares de H decaen a cero sin caídas abruptas en el espectro de valores singulares.
2. La razón entre el mayor de los valores singulares y el menor distinto de cero es grande.

La condición 1 implica que no hay un problema parecido asociado a una matriz bien condicionada, es decir que sustituyendo la matriz H por otra bien condicionada derivada de ella no necesariamente se obtiene una solución aceptable. La condición 2 implica que la matriz H es mal condicionada, es decir que la solución es muy sensible a perturbaciones en los datos. Como resultado la EIT es extremadamente sensible al ruido en las medidas, que deben ser hechas con suficiente precisión según Cheney *et al* [2].

Se ilustra el problema del mal condicionamiento con un ejemplo. Consideremos el problema de mínimos cuadrados:

$$\min_x \|Ax - b\|_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{pmatrix}$$

Construiremos el vector b imponiendo una solución  $x^T = (1 \ 1)$  y le sumaremos una pequeña perturbación, como ruido aditivo.

$$b = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.03 \\ 0.02 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{pmatrix}$$

La principal dificultad con este problema de mínimos cuadrados es que la matriz A está mal condicionada, su número de condición es  $1.1 \times 10^3$ . Esto implica que la solución calculada es muy sensible a las perturbaciones en el vector de observación  $b$ . Si ahora calculamos la solución  $x$  por medio de métodos convencionales de resolución de mínimos cuadrados, como por ejemplo la factorización QR de A, entonces obtenemos:

$$x_{LSQ} = \begin{pmatrix} 7.01 \\ -8.40 \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar esta solución está lejos de la solución exacta  $x^T=(1 \ 1)$ . En este ejemplo queda claro cómo una pequeña perturbación en los datos conlleva a una gran perturbación en la solución.

El propósito de la teoría de la regularización numérica es obtener métodos eficientes y estables numéricamente para llegar a soluciones útiles y únicas para problemas “ill posed”, estableciendo métodos robustos para proveer el parámetro de regularización óptimo.

### 6.2 Métodos de Regularización

La dificultad esencial de los problemas discretos “ill posed” es que son indeterminados debido al grupo de valores singulares pequeños de la matriz H. Por eso es necesario incorporar información adicional acerca de la solución deseada para poder estabilizar el problema.

Aunque es posible agregar muchos tipos de información acerca de la solución  $\theta$ , el principio dominante en los diversos métodos de regularización es requerir que la norma cuadrática (o alguna norma apropiada) de la solución sea “pequeña”. Esto evita que debido a la inestabilidad la solución se haga extremadamente grande. Una estimación inicial  $\theta^*$  de la solución puede incluirse en el término de regularización. Por lo tanto la regularización implica la minimización de la cantidad:

$$\Omega(\mathbf{q}) = \left\| L(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \right\|_2 \tag{Ec. 6.3}$$

En esta ecuación la matriz L es típicamente o la matriz Identidad o una aproximación discreta del operador derivada.

Cuando el término adicional  $\Omega(\theta)$  es introducido, se relaja el requerimiento de que  $H\theta$  sea lo más parecido posible al vector de observación z. En lugar de eso se busca una solución que brinde un balance apropiado entre minimizar  $\Omega(\theta)$  y la norma del residuo  $\| H\theta - z \|_2$ ; esta última expresión cuantifica la bondad con que la solución  $\theta$  se ajusta a los datos. La idea subyacente es que una solución regularizada con una norma pequeña y una norma del residuo aceptablemente chica, no esté demasiado lejos de la solución del problema.

### 6.3 La descomposición en valores singulares

La herramienta más importante para el análisis de los problemas discretos “ill posed” es la descomposición en valores singulares (SVD, singular value decomposition). La SVD revela todas las dificultades asociadas al mal condicionamiento de la matriz H.

Como se recordará, si  $H \in \mathfrak{R}^{M \times N}$  entonces se la puede descomponer de la forma<sup>3</sup>:

$$H = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T \tag{Ec. 6.4}$$

donde  $U = (u_1 \dots u_N)$ ,  $V = (v_1 \dots v_M)$  son matrices con columnas ortonormales,  $U^T U = V^T V = I_n$  y donde  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 \dots \sigma_N)$  tiene elementos no negativos en la diagonal y que aparecen en orden decreciente, de manera tal que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$ .

---

<sup>3</sup> La demostración de este teorema se puede hallar en (1)

Los números  $\sigma_i$  son los valores singulares de la matriz  $H$  mientras que los vectores  $u_i$  y  $v_i$  son los vectores singulares derecho e izquierdo de la matriz  $H$  respectivamente.

El número de condición de  $H$  es igual a la razón  $\sigma_1/\sigma_N$ .

De las relaciones  $H^T H = V \Sigma^2 V^T$  y  $HH^T = U \Sigma^2 U^T$  se deduce que la SVD de  $H$  está fuertemente vinculada a la descomposición en valores propios de las matrices semidefinidas positivas  $H^T H$  y  $HH^T$ ; a partir de esto se demuestra que la SVD es única para una matriz dada  $H$  con excepción de vectores singulares asociados a valores singulares múltiples.

En conexión con los problemas discretos “*ill posed*”, hay dos características que son frecuentes de encontrar en la SVD de  $H$ , una de las cuales ya fue nombrada arriba:

- Los valores singulares  $\sigma_i$  decaen gradualmente a cero sin caídas abruptas. Un incremento en las dimensiones de  $H$  incrementará el número de valores singulares pequeños.
- Los vectores singulares izquierdo y derecho  $u_i$  y  $v_i$  tienden a tener más cambios de signo en sus elementos a medida que el índice  $i$  se incrementa, es decir a medida que  $\sigma_i$  decrece.

Aunque éstas características son encontradas en muchos problemas discretos “*ill posed*” con aplicaciones prácticas, son desafortunadamente muy difíciles o quizás imposibles de probar en general.

Para ver cómo la SVD da una noción del mal condicionamiento de  $H$ , consideramos las siguientes relaciones que se deducen directamente de la ec 6.4

$$\left. \begin{aligned} H v_i &= \mathbf{s}_i u_i \\ \|H v_i\| &= \mathbf{s}_i \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n \quad \text{Ec. 6.5}$$

Vemos que un valor singular pequeño  $\sigma_i$ , comparado con la  $\|H\| = \sigma_1$ , significa que existe cierta combinación lineal de las columnas de  $H$ , caracterizada por los elementos del vector singular derecho  $v_i$ , tal que  $\|H v_i\| = \sigma_i$  sea pequeña. En otras palabras, uno o más valores  $\sigma_i$  chicos implican que  $H$  sea casi de rango deficiente, y que los vectores  $v_i$  asociados con el valor  $\sigma_i$  numéricamente pertenecen al núcleo (*kernel*) de  $H$ . De esto y de las características de  $H$  concluimos que la matriz en un problema discreto “*ill posed*” es siempre mal condicionada y que su núcleo numérico es generado por vectores con muchos cambios de signo.

A partir de la SVD también se pueden inferir algunos aspectos del comportamiento de las soluciones en el dominio de las frecuencias. Se puede ver que aumenta el índice  $i$  los elementos de los vectores singulares  $u_i$  y  $v_i$  correspondientes se vuelven más oscilatorios. Son estos valores entonces los que determinan el contenido de alta frecuencias.

Consideramos ahora la transformación  $H\theta$  de un vector arbitrario  $\theta$ , usando la SVD tenemos

$$H\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i (v_i^T \mathbf{q}) u_i \quad \text{Ec. 6.6}$$

Esto muestra claramente que debido a la multiplicación por los  $\sigma_i$  los componentes de alta frecuencia son más atenuados en el producto  $H\theta$  que los componentes de baja frecuencia, dado

## IMPETOM I

el ordenamiento decreciente de los  $\sigma_i$ . Por lo tanto, el problema inverso debe tener el efecto opuesto: amplifica las oscilaciones de alta frecuencia en el término de la derecha,  $z$ .

## 6.4 Regularización de Tikhonov

La forma más común y conocida de regularización es la llamada regularización de Tikhonov; la idea es definir la solución regularizada como la que minimiza la siguiente expresión:

$$\mathbf{q}_I = \arg \min_{\mathbf{q}} \left\{ \|H\mathbf{q} - z\|^2 + I^2 \|L(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)\|^2 \right\} \quad \text{Ec. 6.7}$$

Donde el parámetro de regularización  $\lambda$  controla la importancia relativa dada a la minimización del término de regularización frente a la minimización de la norma residual. Claramente un valor grande de  $\lambda$  (equivalente a una fuerte regularización) favorece una solución con norma pequeña al costo de una norma residual grande, mientras que un valor pequeño de  $\lambda$  (equivalente a una débil regularización) tiene el efecto opuesto. El parámetro  $\lambda$  controla la sensibilidad de la solución regularizada  $\theta_\lambda$  a las perturbaciones en  $H$  y  $z$ , siendo una cantidad importante que determina las propiedades de la solución regularizada y debiendo ser elegida con cuidado. Más adelante presentaremos algunos métodos para la elección de ese parámetro.

### 6.4.1 Desarrollo del método

El método de regularización de Tikhonov puede ser expresado como:

$$\mathbf{q}_I = \arg \min_{\mathbf{q}} \left\{ \|H\mathbf{q} - z\|^2 + I^2 \|L(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)\|^2 \right\} \quad \text{Ec. 6.8}$$

La ecuación 6.8 representa la así llamada forma generalizada de Tikhonov; con  $L$  igual a la matriz identidad se llega a la forma estándar de Tikhonov. Para dar sencillez a los cálculos supondremos que  $\theta^*$  es nulo, resultando<sup>4</sup>:

$$\mathbf{q}_I = \arg \min_{\mathbf{q}} \left\{ \|H\mathbf{q} - z\|^2 + I^2 \|\mathbf{q}\|^2 \right\} \quad \text{Ec. 6.9}$$

Para encontrar el mínimo de esta expresión, la derivamos y buscamos anular el gradiente. Sea  $\theta + \delta\theta$  un conjunto de vectores en una bola de centro  $\theta$  y radio  $\delta\theta$ . El término a minimizar se lo puede descomponer de la siguiente manera:

$$\|H\mathbf{q} - z\|^2 + I^2 \|\mathbf{q}\|^2 = (H\mathbf{q} - z)^T (H\mathbf{q} - z) + (\mathbf{1}\mathbf{q})^T \mathbf{1}\mathbf{q} \quad \text{Ec. 6.10}$$

Calculando el gradiente a partir de la definición

$$0 = \lim_{\delta\mathbf{q} \rightarrow 0} \frac{\| (H(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}) - z)^T (H(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}) - z) + I^2 (\mathbf{q} + \delta\mathbf{q})^T (\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}) - (H\mathbf{q} - z)^T (H\mathbf{q} - z) + I^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} \|}{\|\delta\mathbf{q}\|} \quad \text{Ec. 6.11}$$

<sup>4</sup> Nota: En el desarrollo de este trabajo se utilizará la forma estándar de Tikhonov con  $L$  igual a la identidad y  $\theta$  igual a cero para simplificar los cálculos.

Desarrollando término a término y aplicando las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (ab)^T &= b^T a^T \\ (a+b)^T &= a^T + b^T \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.12}$$

Utilizando además que siendo  $a$  y  $b$  vectores columna y  $F$  una matriz simétrica se cumple que:

$$\begin{aligned} a^T b &= b^T a \\ a^T F b &= b^T F a \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.13}$$

Se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{\| (H(\mathbf{q} + \partial\mathbf{q}) - z)^T (H(\mathbf{q} + \partial\mathbf{q}) - z) + \mathbf{I}^2 (\mathbf{q} + \partial\mathbf{q})^T (\mathbf{q} + \partial\mathbf{q}) - (H\mathbf{q} - z)^T (H\mathbf{q} - z) + \mathbf{I}^2 \mathbf{q}^T \mathbf{q} \|}{\|\partial\mathbf{q}\|} = \\ & = \frac{\| 2\partial\mathbf{q}^T (H^T H\mathbf{q} - H^T z + \mathbf{I}^2 \mathbf{q}) + \partial\mathbf{q}^T (H^T H + \mathbf{I}^2 I) \partial\mathbf{q} \|}{\|\partial\mathbf{q}\|} \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.14}$$

Resulta fácil de demostrar que el segundo término de esta expresión converge a cero utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

$$\Rightarrow \frac{\| \partial\mathbf{q}^T (H^T H + \mathbf{I}^2 I) \partial\mathbf{q} \|}{\|\partial\mathbf{q}\|} \leq \frac{\| H^T H + \mathbf{I}^2 I \| \|\partial\mathbf{q}\|^2}{\|\partial\mathbf{q}\|} \rightarrow 0 \quad \text{Ec. 6.15}$$

Entonces para que el gradiente se anule el siguiente término se debe anular:

$$\begin{aligned} \Rightarrow H^T H\mathbf{q} - H^T z + \mathbf{I}^2 \mathbf{q} &= 0 \\ \Rightarrow (H^T H + \mathbf{I}^2) \mathbf{q} &= H^T z \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.16}$$

A la 6.16 se le denomina “Ecuación normal regularizada”, por lo que  $\theta$  se la puede hallar a partir de éstas ecuaciones.

$$\Rightarrow \mathbf{q} = (H^T H + \mathbf{I}^2)^{-1} H^T z \quad \text{Ec. 6.17}$$

Es esta expresión entonces la que se utilizará para implementar la regularización de Tikhonov. Observamos que si el parámetro de regularización,  $\lambda$  es nulo entonces:

$$\mathbf{q} = H^\perp z = (H^T H)^{-1} H^T z \quad \text{Ec. 6.18}$$

Donde  $H^\perp$  es la matriz pseudoinversa<sup>5</sup> de  $H$ .

Usando la descomposición de SVD, podemos escribir  $H = U\Sigma V^T$ , donde  $U$ ,  $V$  y  $\Sigma$  tienen las propiedades ya mencionadas.

<sup>5</sup> Fórmula de Moore-Penrose

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} &= (V \Sigma^2 V^T + \mathbf{I}^2)^{-1} H^T z \\
 &= (V \Sigma^2 V^T + V \mathbf{I}^2 V^T)^{-1} H^T z \\
 &= V (\Sigma^2 + \mathbf{I}^2 I)^{-1} V^T V \Sigma U^T z \\
 &\Rightarrow \mathbf{q}_I = V (\Sigma^2 + \mathbf{I}^2 I)^{-1} \Sigma U^T z
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 6.19}$$

El término que contiene  $\square^2 + \check{e}^2$  es una matriz con elementos no nulos en la diagonal. La ec. 6.19 se la puede expresar en forma escalar,

$$\mathbf{q}_I = \sum_{i=1}^n f_i \frac{u_i^T z}{\mathbf{s}_i} v_i
 \tag{Ec. 6.20}$$

Donde:

$$f_i = \frac{\mathbf{s}_i^2}{\mathbf{s}_i^2 + \mathbf{I}^2} \cong \begin{cases} 1 & \mathbf{s}_i \gg \mathbf{I} \\ \mathbf{s}_i^2 / \mathbf{I}^2 & \mathbf{s}_i \ll \mathbf{I} \end{cases}
 \tag{Ec. 6.21}$$

son los llamados “filtros de Tikhonov”

### 6.4.2 El criterio de regularización de la curva L ( L-curve criterion)

La curva L es una representación logarítmica de la norma de la solución regularizada versus la norma del residuo correspondiente. Es una herramienta gráfica apropiada para representar el compromiso entre el rango de excursión de la solución y la bondad de su ajuste a los datos, según la variación del parámetro de regularización. La curva L da entonces una visión más profunda del método de regularización utilizado, ayudando a elegir el parámetro más apropiado para un conjunto de datos dado.

A continuación se presentan las principales características de la curva L y su utilidad como herramienta o método de elección del parámetro de regularización.

Se hace necesaria la regularización al resolver un problema inverso porque la solución formal aportada por la teoría de mínimos cuadrados  $\mathbf{q}_{LS} = H^+ z$  está completamente dominada por el ruido proveniente de errores en los datos y errores de redondeo. Mediante la regularización se atenúan esos efectos y se mantiene la norma  $\|L(\mathbf{q}_I - \mathbf{q}^*)\|$  en un valor razonable. Esta es la filosofía subyacente al método de Tikhonov y a la mayoría de métodos de regularización. Si se aplica demasiada regularización a la solución del problema entonces ésta no se adaptará apropiadamente a los datos  $z$  y el residuo  $\|H\mathbf{q}_I - z\|$  será demasiado grande. Por otro lado, si la regularización es insuficiente entonces el ajuste de los datos será bueno pero la solución estará distorsionada por las contribuciones de los errores en los datos y de redondeo, siendo demasiado grande  $\|L(\mathbf{q}_I - \mathbf{q}^*)\|$ . La figura 11 muestra con claridad este fenómeno, para la regularización de Tikhonov.

## IMPETOM I

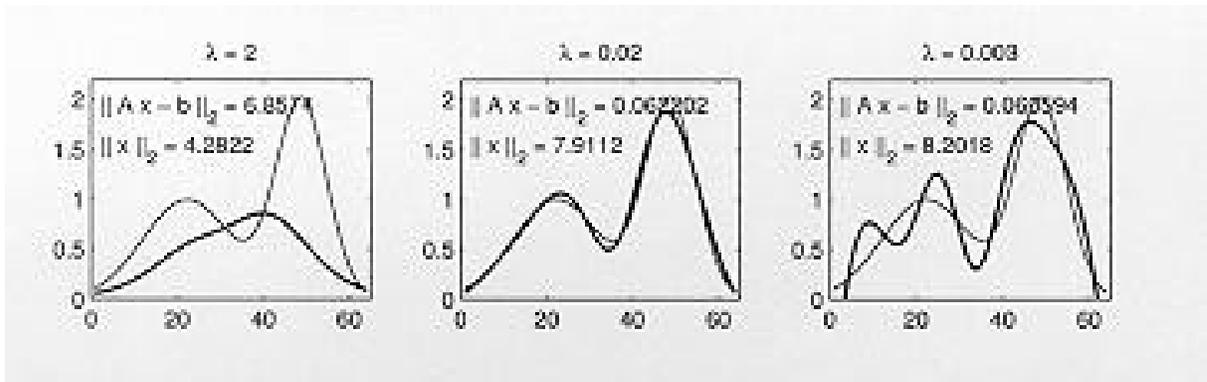


Figura 11 Regularización de Tikhonov, con parámetro  $\lambda = 2$  (sobre-regularizado),  $\lambda = 0,2$  (regularización apropiada),  $\lambda = 0,003$  (sub-regularizado). Tomado de [8].

Habiendo visto la importancia de la norma de la solución y del residuo parece bastante natural graficar estas dos cantidades una con respecto a la otra, es decir como una curva  $\left( \|H\mathbf{q}_1 - \mathbf{z}\|, \|L(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}^*)\| \right)$  parametrizada por el parámetro de regularización. Esto es precisamente la curva L. A continuación se muestra un ejemplo con  $L = I$ .

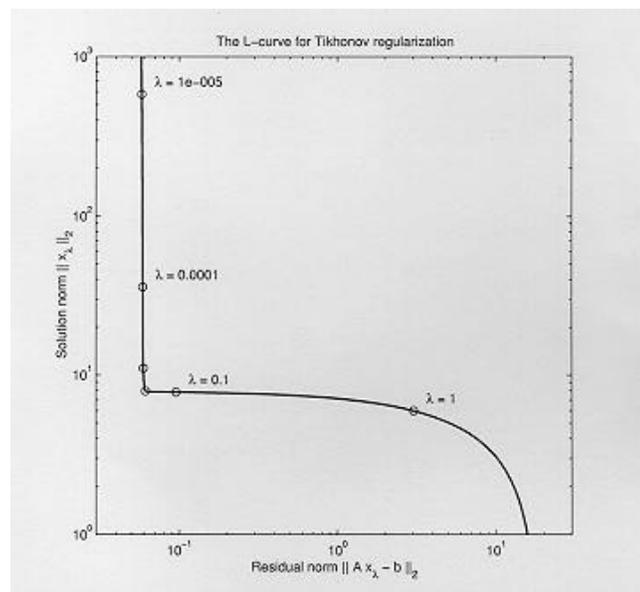


Figura 12 Curva L, tomado de [8].

El hecho de que la curva L para un problema con datos contaminados con ruido tenga un vértice más o menos definido conduce a un método de obtención del parámetro óptimo. En este método el parámetro óptimo de regularización se elige a partir de la ubicación del vértice de la L. En la figura 12 lo es  $\lambda = 0.01$ .

La justificación para esta elección es que dicho punto separa las parte horizontal y vertical de la curva. En la parte horizontal el valor de la norma de la solución no es afectado por la variación

de  $\lambda$ ; aumentando  $\lambda$  a partir del valor asociado al vértice solo se empeora el ajuste de los datos, al aumentarse la norma del residuo.

Por otro lado, disminuyendo  $\lambda$  a partir del valor asociado al vértice, se aumenta la norma de la solución sin mejorar el ajuste de los datos, ya que el residuo permanece in cambiado. De estas afirmaciones se concluye que el valor de  $\lambda$  asociado al vértice de la curva es el valor óptimo, dando un balance apropiado entre la regularización, que implica mantener acotada la norma de la solución, y el ajuste de los datos del problema, es decir que el residuo sea lo más pequeño posible.

Para definir mas estrictamente dicho vértice en [10] se sugiere definir este punto como aquel en el que la curva presenta la mayor curvatura ( $\kappa$ ). Es fácil implementar un procedimiento de minimización unidimensional para el cálculo del máximo de  $\kappa$ . La figura ilustra el criterio de la curva L:

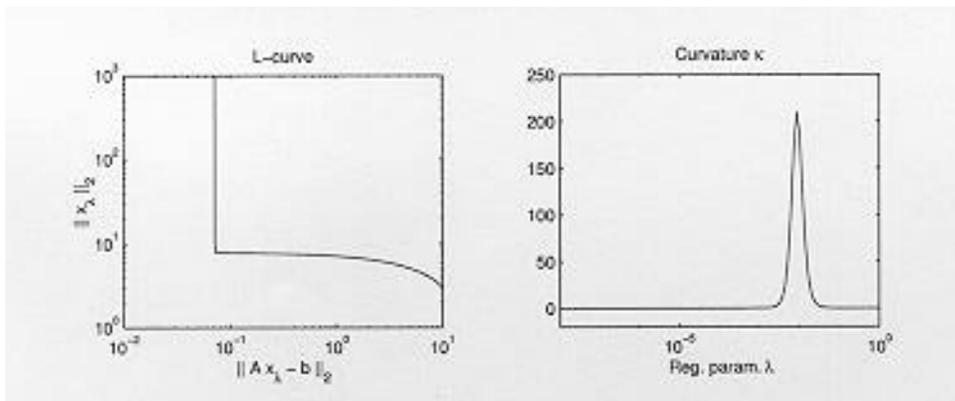


Figura 13 Curva L y su curvatura tomado de [8].

La parte izquierda de la figura 13 muestra la curva donde aparece el vértice claramente definido, en la parte derecha se muestra la curvatura  $\kappa$  en función de  $\lambda$ . El pico en la curvatura  $\kappa$  corresponde, por supuesto, al vértice en la curva L.

## 6.5 Regularización por uniformización de la varianza

Una característica importante de la EIT es la fuerte atenuación de las corrientes dentro del medio, por lo que los voltajes medidos contienen información más rica sobre la región de la periferia que sobre la región central. Eso explica porqué la varianza de la solución estimada es más grande en el centro de la región estudiada que cerca de la frontera. La regularización de Tikhonov reduce este efecto, sin embargo aplica la misma cantidad de regularización en cada píxel del objeto desconocido independientemente de su contribución a los datos medidos. Como la regularización compensa la falta de información en las medidas, el nivel de regularización debería variar espacialmente. Intentaremos obtener niveles de regularización de estos niveles variables mediante la ecualización de la varianza del objeto reconstruido.

### 6.5.1 Ecuación de la varianza

Para obtener una expresión cerrada de la estimación, elegimos mantenernos en el esquema de trabajo de la regularización de Tikhonov pero con una elección apropiada de  $\Omega(\theta)$  de la Ecuación 6.3.

$$\Omega(\mathbf{q}) = \|L(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)\|_2 \quad \text{Ec. 6.22}$$

Imponiendo  $\theta^* = 0$  por razones de simplicidad,

$$\Omega(\mathbf{q}) = \|L\mathbf{q}\|_2 = (L\mathbf{q})^T (L\mathbf{q}) \quad \text{Ec. 6.23}$$

Definimos  $L^T L = R$

$$\Omega(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T R \mathbf{q} \quad \text{Ec. 6.24}$$

Donde  $R$  es una matriz semidefinida positiva; entonces el problema se convierte en encontrar  $R$  que cumpla con una condición de uniformización de la varianza. Esta consiste en ecualizar los valores de los elementos de la diagonal de la matriz de covarianza de  $\hat{\mathbf{q}}$ , donde  $\hat{\mathbf{q}}$  es la solución regularizada.

Buscamos una expresión para la covarianza de  $\hat{\mathbf{q}}$  a partir de la definición de covarianza:

$$\text{Cov}(\mathbf{q}) = E[(\mathbf{q} - E(\mathbf{q}))(\mathbf{q} - E(\mathbf{q}))^T] \quad \text{Ec. 6.25}$$

Del capítulo 5 se tiene que:

$$\mathbf{q} = A^{-1} H z \quad \text{Ec. 6.26}$$

siendo  $A = H^T H + R$  y  $z$  las medidas de voltaje.

Si ahora agregamos ruido  $n$  de valor medio nulo:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{q}) &= A^{-1} H^T E(\mathbf{q} + n) \\ &= A^{-1} H^T E(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.27}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} - E(\mathbf{q}) &= A^{-1} H^T (z + n - E(\mathbf{q})) \\ &= A^{-1} H^T n \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.28}$$

Dado que  $E(z) = z$

De la definición de covarianza Ec. 6.25

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{q}) &= E[(A^{-1} H^T n)(A^{-1} H^T n)^T] \\ &= A^{-1} H^T H (A^{-1})^T E(nn^T) \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.29}$$

Definimos:

$$r_n = E(nn^T) = \text{Var}(n) \quad \text{Ec. 6.30}$$

luego

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{q}) &= r_n A^{-1} H^T H (A^{-1})^T \\ \text{cov}(\mathbf{q}) &= r_n (H^T H + R)^{-1} H^T H (H^T H + R)^{-1} \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.31}$$

Las  $n$  ecuaciones resultantes de esta expresión son insuficientes para determinar la ecuación que es  $n \times n$ . Para resolver este problema indeterminado usaremos la SVD de la matriz  $H$

$$H = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{s}_i v_i^T \quad \text{Ec. 6.32}$$

De modo que la Ec. 6.17 se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{q} = (V \Sigma^T \Sigma V^T + R)^{-1} V \Sigma^T U^T \mathbf{z} \quad \text{Ec. 6.33}$$

Definimos ahora las nuevas variables:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}} &= V^T \hat{\mathbf{q}} \\ \hat{\mathbf{b}} &= U^T \mathbf{z} \\ R &= V D V^T \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.34}$$

La determinación de  $R$  no es directa todavía. Como el comportamiento de  $\Omega(\theta)$  está controlado en gran medida por los valores propios de  $R$ , restringimos el espacio de búsqueda de  $R$  al subespacio de matrices que pueden ser diagonalizadas con la misma base de vectores propios que la matriz  $H^T H$ . Esto hace que la matriz  $D$  sea diagonal y simplifica las derivaciones subsiguientes, usando las nuevas variables podemos escribir:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\Delta^T \Delta + D)^{-1} \Delta^T \mathbf{b} \quad \text{Ec. 6.35}$$

$$\text{COV}(\hat{\mathbf{a}}) = r_n (\Delta^T \Delta + D)^{-1} \Delta^T \Delta (\Delta^T \Delta + D)^{-1} \quad \text{Ec. 6.36}$$

La ecuación 6.36 muestra que la covarianza de  $\mathbf{a}$  es diagonal. Además, debido a la definición de  $\mathbf{v}$ , se puede escribir

$$\text{COV}(\hat{\mathbf{a}}) = \text{COV}(V^T \hat{\mathbf{q}}) = V^T \text{COV}(\hat{\mathbf{q}}) V \quad \text{Ec. 6.37}$$

Esto muestra que es equivalente uniformizar la varianza de  $\mathbf{a}$  o de  $\hat{\mathbf{q}}$ .

La restricción de uniformización de la varianza está determinada por la siguiente relación:

$$c = \frac{r_n \hat{\mathbf{q}}}{r_n} = \frac{\mathbf{d}_{ii}}{(\mathbf{d}_{ii} + d_{ii})^2} \quad \text{Ec. 6.38}$$

Donde  $\sigma_{ii}$  y  $d_{ii}$  denotan los elementos de la diagonal de  $\Sigma^T \Sigma$  y de  $D$ , respectivamente. El parámetro  $c$  controla el nivel de la varianza de la reconstrucción.

### 6.5.2 Elección del parámetro c

Según (6) existen básicamente dos métodos para la determinación del parámetro de regularización c. Ellos son el método de la curva L y el criterio de validación cruzada (OCV: Ordinary Cross Validation).

La primera de las técnicas provee una herramienta gráfica para la estimación del parámetro de regularización, ya presentada más arriba. Esta técnica si bien es apropiada para la regularización de Tikhonov no permite una adaptación directa a esta forma de regularización por uniformización, por lo que no fue utilizada.

La segunda es una herramienta recomendada en la literatura de determinación de c para el método de la varianza.

Para la elección del parámetro c se utilizó el criterio OCV (Ordinary Cross Validation).

#### *Criterio de validación cruzada*

El criterio de validación cruzada se define de la siguiente forma: sean  $y, y_k, y^{(-k)}$  las representaciones del vector de medidas (de dimensión m), su  $k^{\text{ésimo}}$  componente y el vector  $y \setminus y_k$ , respectivamente. Para un valor dado del parámetro de regularización, es posible calcular la estimación  $\bar{x}^{(-k)}$  a partir de un vector de datos incompleto  $y^{(-k)}$ , y predecir  $y_k$  a partir de  $\bar{x}^{(-k)}$ . Sea  $\hat{y}_k^{(-k)}$  el valor predicho. El criterio OCV se define entonces a partir de la minimización de la función siguiente:

$$F_{OCV}(y, \mathbf{I}) = \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k^{(-k)})^2 \quad \text{Ec. 6.39}$$

sobre el parámetro  $\mathbf{I}$ .

El criterio OCV puede ser visto como un criterio de error en la predicción de los datos.

#### *Implementación*

Calcular la diferencia  $y_k - \hat{y}_k^{(-k)}$  requiere mucho tiempo de procesamiento porque involucra muchas operaciones con matrices. Por cada cálculo de  $\hat{y}_k^{(-k)}$  para  $1 \leq k \leq m$ , se requiere la inversión de la matriz  $H_{(-k)}^T H_{(-k)} + R$ , donde  $H_{(-k)}$  es la matriz  $H$  menos su  $k^{\text{ésima}}$  fila. Como deben ser determinados dos parámetros, el tiempo de cálculo puede alcanzar valores inaceptables. Para reducir el número de operaciones, la expresión de  $x^{(-k)}$  puede ser replanteada como sigue, gracias al lema de inversión de matrices de Shermann-Morrison:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(-k)} &= (H^T H - s_k s_k^T + R)^{-1} (H^T y - s_k y_k) \\ &= (A - s_k s_k^T)^{-1} (H^T y - s_k y_k) \\ &= \left( A^{-1} - \frac{A^{-1} s_k s_k^T A^{-1}}{s_k^T A^{-1} s_k - 1} \right) (H^T y - s_k y_k) \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.40}$$

Donde  $A$  representa la matriz normal  $H^T H + R$ , y  $s_k^T$  es la  $k$ ésima fila de  $H$ . El error de predicción entonces toma la forma:

$$y_k - \bar{y}_k^{(-k)} = \frac{y_k - s_k^T A^{-1} H^T y}{1 - s_k^T A^{-1} s_k} \quad \text{Ec. 6.41}$$

Sea  $P = HA^{-1}H^T$ ; entonces

$$\begin{aligned} F_{OCV} &= \sum_{k=1}^m \left( \frac{y_k - s_k^T A^{-1} H^T y}{1 - p_{kk}} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \frac{[(I - HA^{-1}H^T)y]_k}{1 - p_{kk}} \right)^2 \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.42}$$

Donde  $p_{kk}$  son los elementos diagonales de  $P$ .

De esta forma, el cálculo completo del criterio OCV puede ser hecho con la inversión de una sola matriz, es decir el cálculo de  $A^{-1}$ . Con respecto al cálculo directo de las diferencias

$y_k - \bar{y}_k^{(-k)}$ , el orden de magnitud del volumen de cálculo se divide por  $m$ . Este corresponde aproximadamente al de una reconstrucción lineal y permanece menor al de una iteración en un método de reconstrucción iterativo.

## 6.6 Principio de Picard

En problemas continuos (no discretos) la Condición de Picard establece pautas para determinar si el problema es “*ill posed*”. El desarrollo formal de este tema para problemas continuos no se abordará en este trabajo.

Para problemas discretos “*ill posed*” tiene sentido establecer una condición discreta de Picard de la manera que sigue.

En problemas reales el término de  $z$  que corresponde a las observaciones siempre está contaminado por varios tipos de errores, como por ejemplo, errores de medida, errores de aproximación y errores de redondeo. De esa manera  $z$  puede ser escrito como:

$$z = \bar{z} + e$$

Donde  $e$  representa el término de error y  $\bar{z}$  las observaciones libres de errores. Tanto  $\bar{z}$  como  $\bar{q}$  representan el problema subyacente no perturbado, que obviamente es desconocido. Ahora, si queremos calcular la solución regularizada  $q_{eg}$  a partir de las observaciones conocidas  $\bar{z}$ , de modo tal que  $q_{eg}$  aproxime la solución exacta  $\bar{q}$  entonces el criterio discreto de Picard establece condiciones sobre el término exacto  $\bar{z}$ .

### 6.6.1 La condición discreta de Picard

Las observaciones no perturbadas  $\bar{z}$  en un problema discreto “*ill posed*” con matriz de regularización  $L$ , satisfacen la condición discreta de Picard si los coeficientes  $|u_i^T \bar{z}|$  en promedio decaen a cero más rápidamente que los valores singulares  $\sigma_i$ . Tomemos la fórmula

6.20 e impongamos  $\epsilon$  igual a cero, de esta forma tendríamos la solución al problema sin regularizar.

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T \mathbf{z}}{\mathbf{s}_i} v_i \quad \text{Ec. 6.43}$$

Donde  $n$  indica la cantidad de valores singulares a tomar. Esta formulación nos permite ver claramente la influencia de los valores singulares pequeños en la solución. En presencia de ruido vemos que  $u_i^T \mathbf{z}$  es poco probable que se anule, aunque  $\mathbf{z}$  sea ortogonal a  $u$ , este producto no se anula. Al tener valores singulares muy pequeños hace que el cociente tome valores muy grandes, que multiplican a los vectores singulares  $v_i$ . De modo que la solución incorpora componentes muy grandes en las direcciones  $v_i$ . Por lo que dicha condición nos muestra que tan sensible al ruido serán nuestras soluciones, si no se verificara la condición de Picard las soluciones serían extremadamente sensibles al ruido.

Esta condición asegura que la solución al problema de mínimos cuadrados  $\bar{\mathbf{q}} = A^+ \bar{\mathbf{z}}$  no perturbado no tiene una norma muy grande porque los coeficientes de la solución exacta  $|v_i^T \bar{\mathbf{q}}| = |u_i^T \bar{\mathbf{z}} / \mathbf{s}_i|$  también decrecen. El criterio discreto de Picard también asegura una solución físicamente significativa al problema inverso subyacente, esto también asegura que la solución puede ser aproximada por una solución regularizada (siempre que pueda encontrarse algún parámetro de regularización).

En la figura 14 se grafican los valores singulares en azul, los valores  $\log|u_i^T \mathbf{z}|$  en verde y el  $\log|u_i^T \mathbf{z} / \mathbf{s}_i|$  en rojo para cada valor singular. Se observa como era de esperar que los valores singulares después del valor singular 104 no tienen sentido, ya que tenemos 104 medidas independientes. Vemos por otra parte los ceros rojos que corresponden al cociente de  $u_i^T \mathbf{z} / \mathbf{s}_i$  comienzan a despegarse un poco antes del valor singular 50, debido a que en promedio  $|u_i^T \bar{\mathbf{z}}| > \mathbf{s}_i$ . Por lo que se podría truncar hasta antes del 50 que es coherente con los resultados estudiados en el método de Truncamiento el capítulo 7.

# IMPETOM I

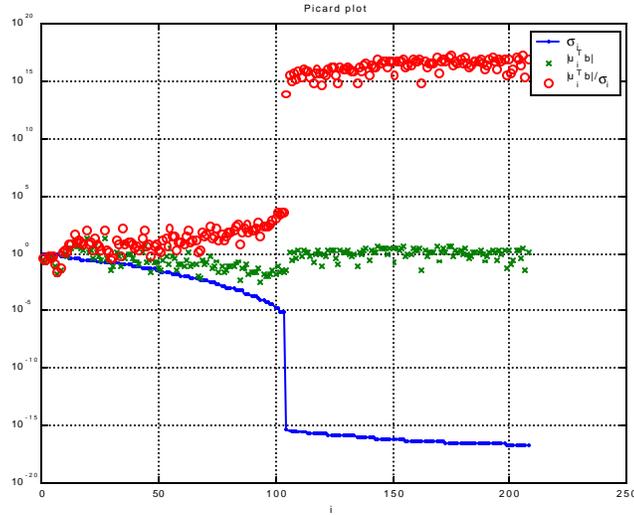


Figura 14 Criterio de Picard para medidas reales

En las pruebas realizadas la condición discreta de Picard arrojó resultados diversos. En algunos casos la condición se mostró apropiada para explicar los resultados de la regularización. En esos casos con la regularización se lograron imágenes aceptables, verificándose la condición de Picard. En otros casos se lograron reconstrucciones aceptables a pesar de no verificarse dicha condición. Como se puede observar en la figura 15 con otro conjunto de valores reales, todos los valores de  $u_i^T z / \sigma_i$  están por encima de los valores singulares, sin embargo se obtuvieron imágenes aceptables. Con esto se concluye que la condición discreta de Picard tiene una aplicación limitada como herramienta de estudio de la regularización de problemas "ill-posed".

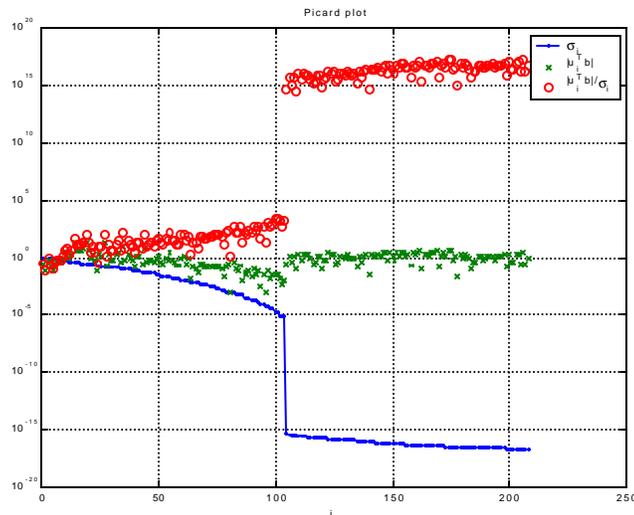


Figura 15 Criterio de Picard para otro conjunto de medidas reales

# 7 Implementación del método de la Matriz de Sensibilidad

## 7.1 Introducción

En este capítulo se evaluarán diferentes posibilidades para el cálculo de la matriz de sensibilidad. Se estudiarán distintas formas de cálculo de la matriz de sensibilidad usando métodos analíticos de cálculo de los gradientes e introduciremos una forma alternativa para la obtención de estos gradientes, mejorando como se verá más adelante el número de condición de la matriz. También estudiaremos la incidencia del tamaño de la grilla en los errores cometidos para el cálculo de los potenciales en la resolución del problema directo y seleccionaremos la grilla mas apropiada. Finalizando el capítulo con el análisis del problema de la inversión de la matriz y evaluación de las distintas formas de regularización.

## 7.2 Definición de la Grilla

Para el cálculo de la Matriz  $F$  (ver ecuación 5.26) es necesario dividir la región de trabajo en un número finito de elementos. Para el caso de dos dimensiones, el elemento más simple a utilizar es el triángulo.

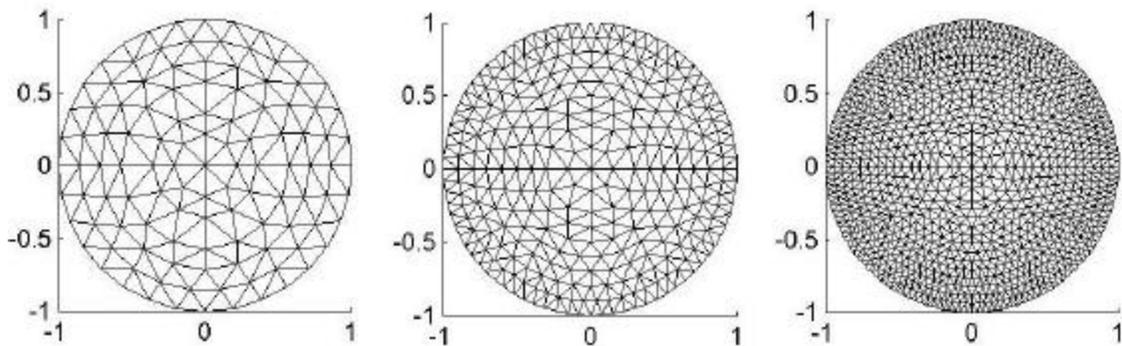


Figura 16 Grillas de 196, 584 y 1884 elementos

## IMPETOM I

En la figura 16 se muestran algunas de las grillas utilizadas en nuestro estudio. La primera de ellas es de 196 elementos, la segunda grilla es de 584 elementos y la última es de 1884 elementos. Así también se realizaron estudios para grillas de 492, 1968, 4484 y 12704 elementos.

Se intentará evaluar el efecto de la discretización en la calidad de la imagen reconstruida. Las primeras dos grillas se eligieron por coincidir con muchos trabajos en la literatura y se evaluaron distintas formas de disposición de elementos en las grillas y su cantidad aún teniendo en cuenta que según [12] se aumenta el mal condicionamiento del problema. Con respecto a la disposición de los elementos, se tomaron casos como por ejemplo el 1884 con una distribución uniforme de los elementos en todo el dominio y también con otros casos como el de 1968 elementos con una mayor densidad de elementos bajo los electrodos. Esto último intenta vincular la disposición de los elementos con la variación que sufren los gradientes en las cercanías de los electrodos. Como se muestra en las figuras 17 y 18:

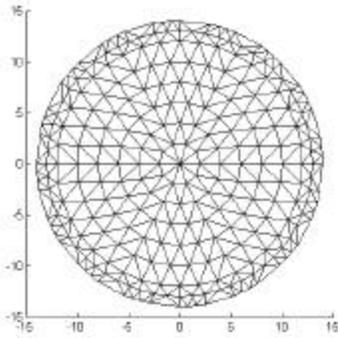


Figura 17 Grilla 492 elementos

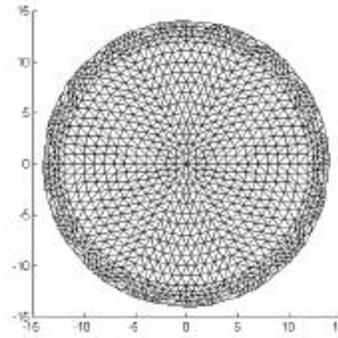


Figura 18 Grilla 1968 elementos

Dado que los coeficientes de la matriz de sensibilidad correspondiente a los elementos ubicados en el centro de la grilla son más pequeños que los de la periferia, los elementos centrales son más grandes que los de la frontera, logrando así aumentar la sensibilidad en la periferia, a costa de menor resolución.

Para generar estas grillas se adaptó el paquete EidorsDemo<sup>6</sup>, que contiene rutinas que permiten generar grillas en Matlab. Descartamos otros paquetes como el QMG<sup>7</sup> que también realizan grillas para problemas de FEM por no ser tan específicas para nuestra aplicación.

---

<sup>6</sup> El EidorsDemo es un paquete que contiene rutinas en Matlab y está disponible en internet. Fue realizado en el Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Kuopio (Finlandia) por J. Kaipio en 1994 y revisado en 1999 por M. Vauhkonen en su tesis de posgrado. Este paquete contiene rutinas para resolver el método directo por medio de FEM y rutinas que permiten resolver el problema inverso utilizando el modelo completo del electrodo, es decir considerando las impedancias de contacto entre los electrodos y la piel, magnitud que es muy difícil de medir en cada experimento.

<sup>7</sup> QMG: paquete que permite generar grillas (meshes) para problemas de elemento finito, en dos y tres dimensiones. Este paquete es de uso y distribución libre.

### 7.2.1 Estructuras de grilla

El EidorsDemo tiene un generador de grillas propio, que está basado en algoritmos del QMG.

Se generaron grillas a partir de los radios de los nodos y la cantidad de nodos en cada circunferencia (definida para cada radio). Toda la información de la grilla se guarda en dos variables:

- La matriz  $g$ , que contiene las coordenadas de los nodos
- La matriz  $H$ , que corresponde a la matriz de conectividad. Matriz que relaciona cada elemento con los nodos que lo definen.

Para lograr una mejor eficiencia en el manejo de estas variables se generan otras variables estructuradas que contienen más información, no solo las coordenadas de los nodos sino también la conectividad, o sea a qué nodos están conectados y a qué elementos pertenecen, para esto se utiliza la variable *Nodo*.

Otra variable estructurada es *Elemento* que tiene la información de qué nodos lo definen, los elementos adyacentes a él y si el elemento está ubicado en la frontera.

## 7.3 Cálculo del Gradiente de Voltaje en cada elemento

Una vez definida la grilla y asignados los electrodos a los nodos correspondientes sobre la frontera, el siguiente paso es calcular los gradientes de voltaje dentro de cada elemento, para la cual tenemos un paso intermedio que es el de calcular los potenciales en los nodos de la grilla.

### 7.3.1 Cálculo de los potenciales en los elementos

Asumiendo que tenemos un medio homogéneo (conductividad constante), del capítulo III se cumple la ecuación 3.7, llamada ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \qquad \text{Ec. 7.1}$$

La ecuación de Laplace es más sencilla de resolver que la ecuación de Poisson (Ec 3.11) aunque su resolución no es inmediata, para resolverla se hace necesario imponer hipótesis de simetría según la dirección  $z$  normal al disco.

Existen dos métodos de hallar una solución útil para esta ecuación, en el primero se resuelve analíticamente y en el segundo es el resultado de una aproximación utilizando un modelo más sencillo del problema. Estudiaremos primero el método analítico.

Observando la simetría que presenta el problema en  $q$  se buscan soluciones de la forma:

$$\Phi(r, \mathbf{q}) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n \cos(n\mathbf{q}) + B_n r^n \text{sen}(n\mathbf{q})) \quad \text{Ec. 7.2}$$

Aplicando las condiciones de borde:

$$J(\mathbf{q}) = \mathbf{s} \frac{\partial \Phi(r, \mathbf{q})}{\partial r} \Big|_{r=a} = \begin{cases} \frac{1}{s\mathbf{d}} & \text{para } \mathbf{q}_1 - \mathbf{d}/2 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_1 + \mathbf{d}/2 \\ -\frac{1}{s\mathbf{d}} & \text{para } \mathbf{q}_2 - \mathbf{d}/2 \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_2 + \mathbf{d}/2 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \quad \text{Ec. 7.3}$$

Resolviendo la Ec. 1.2 utilizando Ec1.3 para un disco de radio  $a$  espesor  $s$ :

$$\Phi(r, \mathbf{q}) = \frac{2Ia}{s\mathbf{s}\mathbf{d}\mathbf{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \text{sen}\left(\frac{n\mathbf{d}}{2a}\right) [\cos(n(\mathbf{q} - \mathbf{q}_1)) - \cos(n(\mathbf{q} - \mathbf{q}_2))] \quad \text{Ec. 7.4}$$

Donde  $\Phi(r, \mathbf{q})$  es el voltaje en el punto de radio  $r$  y ángulo  $\mathbf{q}$  para una distribución de conductividad isotrópica homogénea  $\mathbf{s}$ ,  $I$  es la corriente aplicada entre 2 electrodos de ancho  $\mathbf{d}$  y alto  $s$  ubicados sobre la frontera de la región y en posición angular  $\mathbf{q}_1$  y  $\mathbf{q}_2$  respectivamente.

Si se aplica esta ecuación sobre cada nodo se puede calcular el potencial como lo muestra la figura 19.

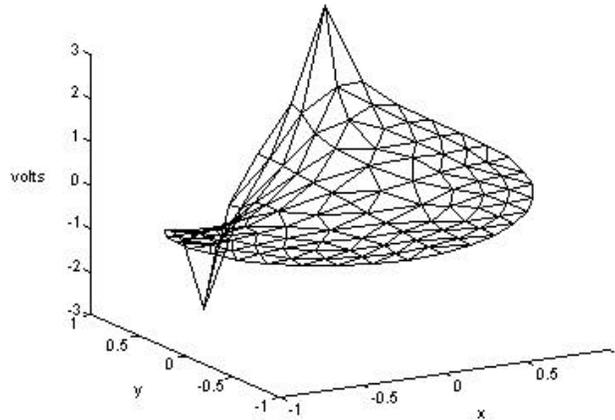


Figura 19 Potencial en los Nodos de la Grilla, al aplicar corriente por dos electrodos adyacentes. Se obtuvo resolviendo el problema directo mediante FEM

El gradiente de voltaje  $\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{F}$  se puede determinar tanto diferenciando la ecuación 7.4 respecto a  $(r, \mathbf{q})$ , o utilizando los voltajes en los nodos para calcular el valor supuesto constante del gradiente para cada elemento.

Formula derivadas según  $\mathbf{q}$  y  $r$

$$E_r u_r = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) u_r \quad \text{Ec. 7.5}$$

$$E_q u_q = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right) u_q \quad \text{Ec. 7.6}$$

$$E_z u_z = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) u_z \quad \text{Ec. 7.7}$$

A estas ecuaciones se las sustituye en la siguiente;

$$S_{ij} = - \int_{j^{\text{esimo elemento}}} \nabla \Phi_u \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. 7.8}$$

en la cual nos queda:

$$S^{IM}(r, \mathbf{q}) = \int \left( (E_r^I E_r^M) u_r \cdot u_r + (E_q^I E_q^M) u_q \cdot u_q \right) dv \quad \text{Ec. 7.9}$$

$I$ : par de inyección de corriente

$M$ : par de medida de voltaje

Como se mencionó anteriormente hay un método alternativo para calcular los voltajes en los nodos. Dadas dos cargas puntuales en la ubicación de los electrodos de corriente, con cargas  $Q^+$  y  $Q^-$ , de las ecuaciones conocidas para una carga puntual se tiene que:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad \text{Ec. 7.10}$$

Donde  $r$  es la distancia al punto en cuestión a la carga, y  $r_0$  la distancia de la carga a la posición de referencia.

Si ahora se considera un dipolo de cargas  $Q^+$  y  $Q^-$  tomando la distancia al punto de referencia como infinito, la ecuación queda:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{Ec. 7.11}$$

Donde  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias desde el punto de estudio a las cargas  $Q^+$  y  $Q^-$  respectivamente. Para un medio homogéneo, isotrópico y para un semiplano infinito, el potencial debido a inyección y drenaje de corriente  $I$  en dos puntos muy cercanos entre si es:

$$\Phi(r) = \frac{\mathbf{r}I}{2\mathbf{p}} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{Ec. 7.12}$$

Siendo  $\rho$  la resistividad en el semiplano conductor, en los electrodos el voltaje se calcula como:

$$\Phi(r) = \frac{\mathbf{r}I}{2\rho u} \quad \text{Ec. 7.13}$$

## IMPETOM I

Donde  $a$  es la distancia entre los electrodos.

Del estudio de ambos métodos surgen los siguientes resultados:

1. Se observó que las formas de voltajes son similares lo que mostraría la validez de la aproximación realizada al usar el método de los dipolos (ver figura 20).
2. La distribución de los voltajes en el interior de la región decrece más rápidamente a medida que nos alejamos de los electrodos de inyección para el método de los dipolos que para el analítico.
3. El método de los dipolos es menos costoso en términos computacionales

Luego de los estudios realizados se escogió el método analítico dado que es una solución exacta al problema[15], teniendo en cuenta que el cálculo de los potenciales se realiza fuera de línea, de modo que el aumento en el tiempo de cálculo no sería un problema según [13].

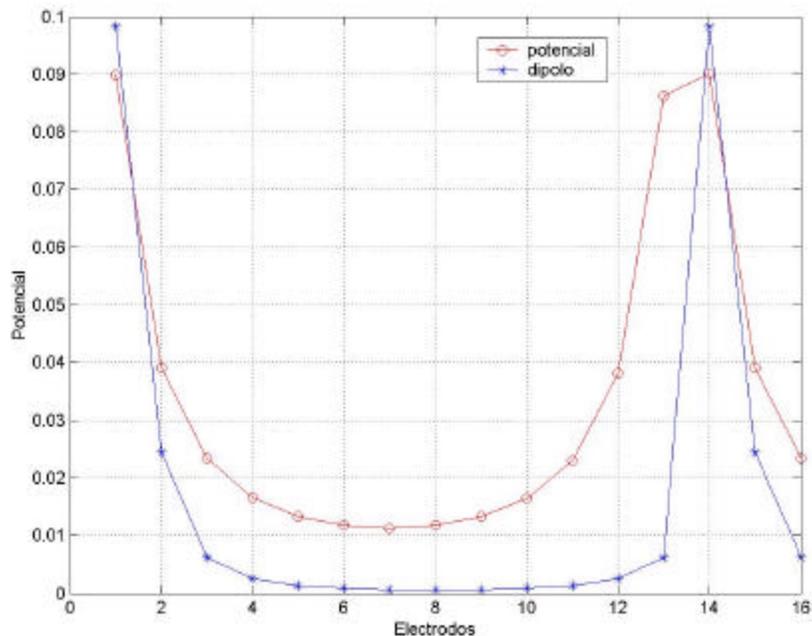


Figura 20 Cálculo del potencial usando: o-sumatoria, \*-modelo de dipolos

La figura 20 muestra la distribución de potenciales en los electrodos calculada con los dos métodos mencionados.

### *Calculo de los potenciales con la formulación analítica*

En este cálculo se utiliza la ecuación 7.4, que es una suma infinita de términos que convergen a cero en valor absoluto. La pregunta que surge es cuántos términos hay que tomar en la sumatoria para tener una buena aproximación al valor real.

Para hacer una evaluación de la cantidad de términos necesarios de la sumatoria nombrada arriba estudiaremos el cálculo de los voltajes en la frontera dado un medio uniforme. Se eligió

hacer este estudio solamente en los voltajes de la frontera porque su estudio en todo el dominio involucraría demasiado tiempo de cálculo; por otra parte la zona con gradientes mayores es la frontera donde se encuentran los electrodos de corrientes mientras que en el interior los gradientes son más suaves. Además en los voltajes en la frontera se los puede vincular más fácilmente con el error en los datos para de esa manera poder acotar los errores de cálculo de manera que sean despreciables respecto a los errores de medida.

Para el cálculo del potencial según la ecuación 7.4 se implementó un algoritmo iterativo que sumara los términos hasta que el valor absoluto de éstos fuera menor que cierta tolerancia dada. Para la estimación del error de truncamiento de la serie asumiremos que el último valor obtenido en la iteración con la tolerancia más baja es el exacto.

En la siguiente gráfica se puede apreciar el valor de la estimación del error relativo en el cálculo del potencial de frontera contra el logaritmo del valor utilizado de tolerancia.

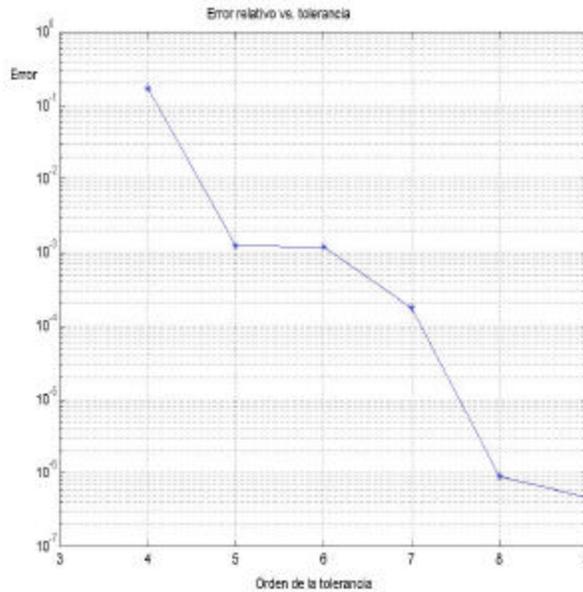


Figura 21 Error relativo en el cálculo del potencial

*Conclusión*

En esta gráfica se observa, como era de esperarse, que el error es monótono decreciente para los valores de tolerancia empleados. Esto indica que para dichos valores todavía no se encuentran problemas de inestabilidad numérica debido a la capacidad limitada de la máquina en la representación de números reales.

Surge ahora el problema de elegir los valores de tolerancia a emplear para los cálculos definitivos. No existe forma cerrada de evaluar el error cometido al truncar la serie. Teniendo en cuenta el párrafo anterior y que con las tolerancias usadas en los ensayos que se realizan en el subcapítulo 7.3.2 mostraremos se obtienen resultados satisfactorios para tolerancias del orden  $10^{-9}$ , adoptaremos ese valor; por otra parte se deben considerar que los tiempos de cálculos empleados se incrementan considerablemente para tolerancias menores, aunque este argumento no es crítico pues este cálculo se efectúa fuera de línea.

### 7.3.2 Construcción de la Matriz de Sensibilidad

Para construir la Matriz de sensibilidad S se deben considerar todas las combinaciones de pares de electrodos de inyección de corriente con pares de medidas de voltaje.

Para cada combinación se debe evaluar el producto escalar de  $\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{F}_u$  (gradiente de voltaje generado por una inyección de corriente en el par de electrodo de corriente) y  $\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{Y}_u$  (gradiente de voltaje generado por una inyección de corriente en el par de electrodos de medida de voltaje).

Los coeficientes de la Matriz de Sensibilidad se calculan con la fórmula 5.24:

$$S_{ij} = - \int_{j^{\text{esimo}} \text{ elemento}} \nabla \Phi_u \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. 7.14}$$

Donde  $i$  se refiere a la  $i^{\text{esima}}$  combinación de “electrodos de inyección de corriente – medida de voltaje” y  $j$  al  $j^{\text{esimo}}$  elemento.

La integral se reduce a una simple multiplicación por el volumen de cada elemento dado que el gradiente de voltaje en cada elemento es considerado constante; sin embargo es posible hacer un refinamiento de la grilla para disminuir el error de discretización en el cálculo de esta integral. De hecho esto fue implementado con una rutina que sucesivamente subdivide el dominio de integración en elementos menores. Esta rutina obviamente mejora la precisión a costa de un mayor tiempo de cálculo.

Una vez obtenida la matriz S, se obtiene:

$$F = G^{-1} S \quad \text{Ec. 7.15}$$

Donde  $G$  es una matriz diagonal; los términos de la diagonal de  $G$  corresponden a los voltajes de la frontera medidos para el caso de una conductividad uniforme.

En este momento ya se estaría en condiciones de pasar a invertir la matriz F para así poder continuar con la reconstrucción de las imágenes. Sin embargo no se ha definido aún qué grilla de las mencionadas anteriormente sería la más apropiada. En la literatura no se encuentra una forma rigurosa para esta elección, por lo que se optó por utilizar los siguientes criterios:

1. Minimizar el error relativo entre los voltajes de frontera ( $g_u$ ) obtenidos a partir de la suma de las filas de S contra el  $g_u$  calculado utilizando la ecuación 7.14.
2. El tamaño de la grilla y consiguientemente el de la matriz S debe ser manejable en tiempos de procesamiento apropiados.

En el primer criterio los voltajes sobre la frontera se pueden obtener analíticamente aplicando la fórmula 7.4. Existen dos maneras de calcular los  $g_u$  :

- a) El vector  $g_u$  se calcula como las diferencias entre los voltajes de los electrodos de medida.
- b) Utilizando la matriz S para calcular los  $g_u$  mediante la fórmula 5.17

$$g_u = c_u \int_{\Omega} \nabla \Phi_u \nabla \Psi_u dv$$

En esta fórmula la integración es sobre toda la región  $\Omega$ , en términos matriciales corresponde a la sumatoria de todos los coeficientes de una fila de la Matriz de Sensibilidad.

El hecho de que la región de trabajo  $\Omega$  se divida en un número finito de elementos y que se asuma que el valor de los gradientes de potencial en estos elementos es constante, genera errores en el cálculo de los  $g_u$ . Particularmente se generan más errores en los elementos periféricos ya que cerca de los electrodos que inyectan corriente existen altos valores de gradiente de voltaje, de hecho para tratar de eliminar estos errores es que las grillas más finas se construyeron con más elementos en la frontera.

Comparar estos dos métodos de cálculo de  $g_u$  (calculando la norma de la diferencia entre los resultados de ambos), puede servir como un buen indicador de la calidad de la grilla elegida, según Metherhall [12].

En la figura 22 se muestra el error relativo de los valores de  $g_u$  calculados con el método a) y el método b), para una inyección de corriente, utilizando una grilla de 196 elementos y variando el refinamiento para el cálculo de los elementos de la matriz S (22(a) sin refinamiento, 22(b) un refinamiento y 22(c) dos refinamientos)

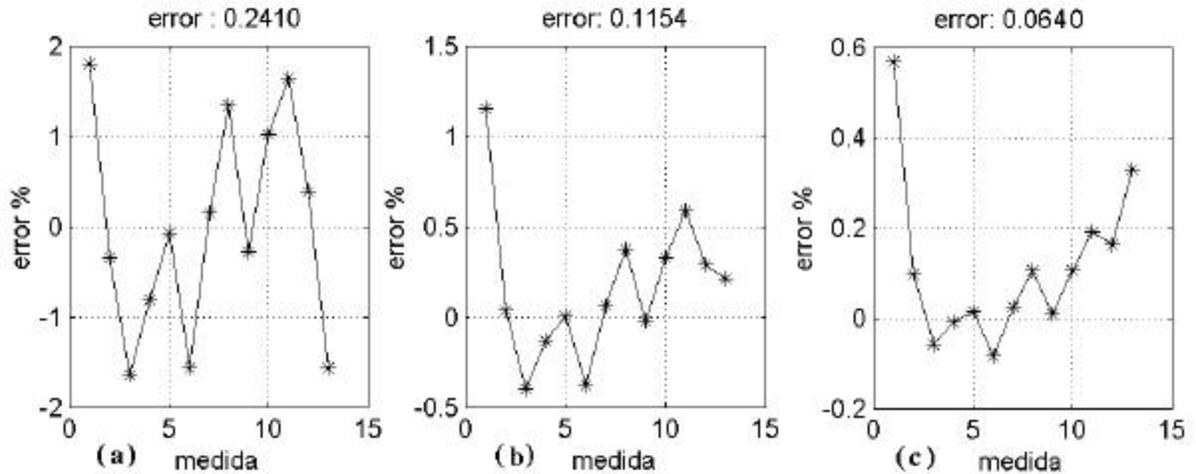


Figura 22 Error relativo de  $g_u$  (Grilla de 196 elementos (a) sin refinamiento,(b) un refinamiento y (c) dos refinamientos)<sup>8</sup>

Para esta grilla en particular se nota que a medida que se refina en el cálculo de los potenciales la norma del error disminuye, algo que concordaría con lo dicho anteriormente, mientras más elementos menor es el error.

<sup>8</sup> Se utilizó distinta escala para poder apreciar las pequeñas variaciones

En las figuras 23 y 24 se muestran similares resultados para las grillas de 584 y 1968 elementos.

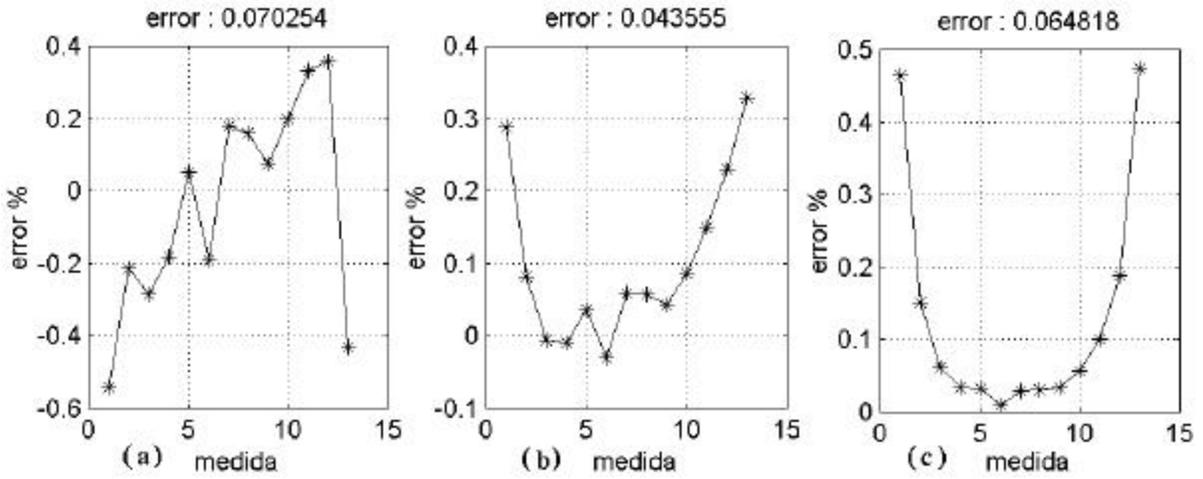


Figura 23 Error relativo de  $g_u$  (Grilla de 584 elementos (a) sin refinamiento, (b) un refinamiento y (c) dos refinamientos)

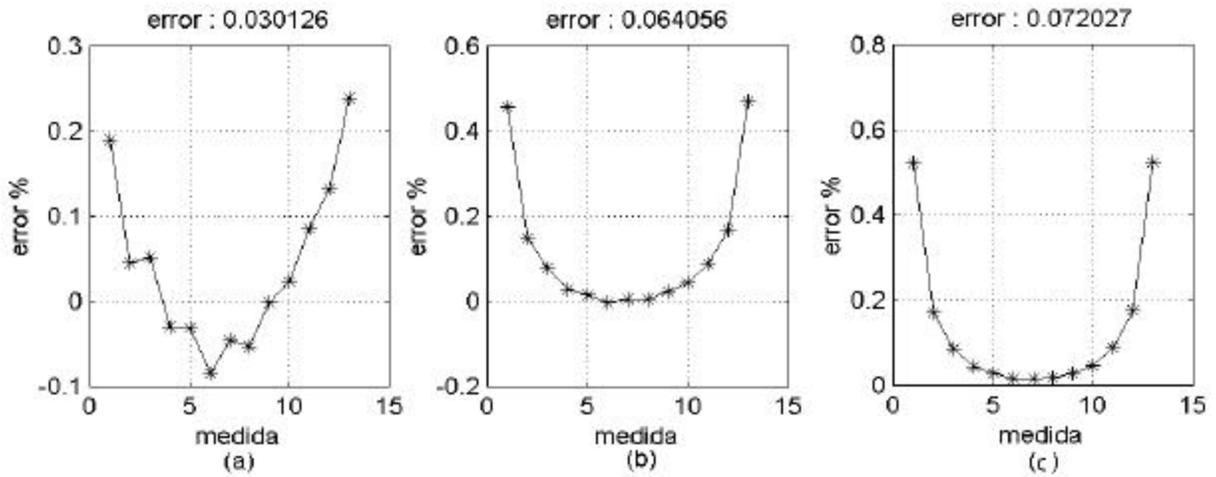


Figura 24 Error relativo de  $g_u$  (Grilla de 1968 elementos (a) sin refinamiento, (b) un refinamiento y (c) dos refinamientos)

Observando las figuras 22, 23 y 24 se nota que al aumentar el refinamiento las gráficas de error para las tres grillas tienden a suavizarse, convergiendo a una forma que es la misma para las tres. Esta forma de “U” es similar a la distribución de potencial  $g_u$ ; se podría explicar por el hecho de que en los extremos los valores de los gradientes son más altos por encontrarse cerca de los electrodos de inyección de corriente y es allí donde la aproximación que se realizó para el cálculo de los gradientes es peor<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Para observar este fenómeno se tuvo que utilizar distintas escalas en las gráficas

## IMPETOM I

En el proceso de refinamiento se mejora la integración en el dominio por lo que el error disminuye. La grilla de 196 elementos, en el primer refinamiento pasa a ser una grilla de 784 elementos similar a la grilla de 584 elementos sin refinar dando errores similares. El siguiente refinamiento para la grilla de 196 elementos se trata de una partición del dominio en 3136 elementos, sin embargo el error de esta grilla y la de 9344 elementos son del mismo orden, no notándose una mejora importante en relación a la cantidad de elementos. En este sentido se hicieron ensayos con grillas de diferentes tamaños dando resultados similares en los valores del error con respecto al gu. Entre ellas se ensayaron las grillas utilizadas por el paquete EidorsDemo (492 y sucesivos refinamientos) para dos refinamientos con resultados similares a los que se mostraron.

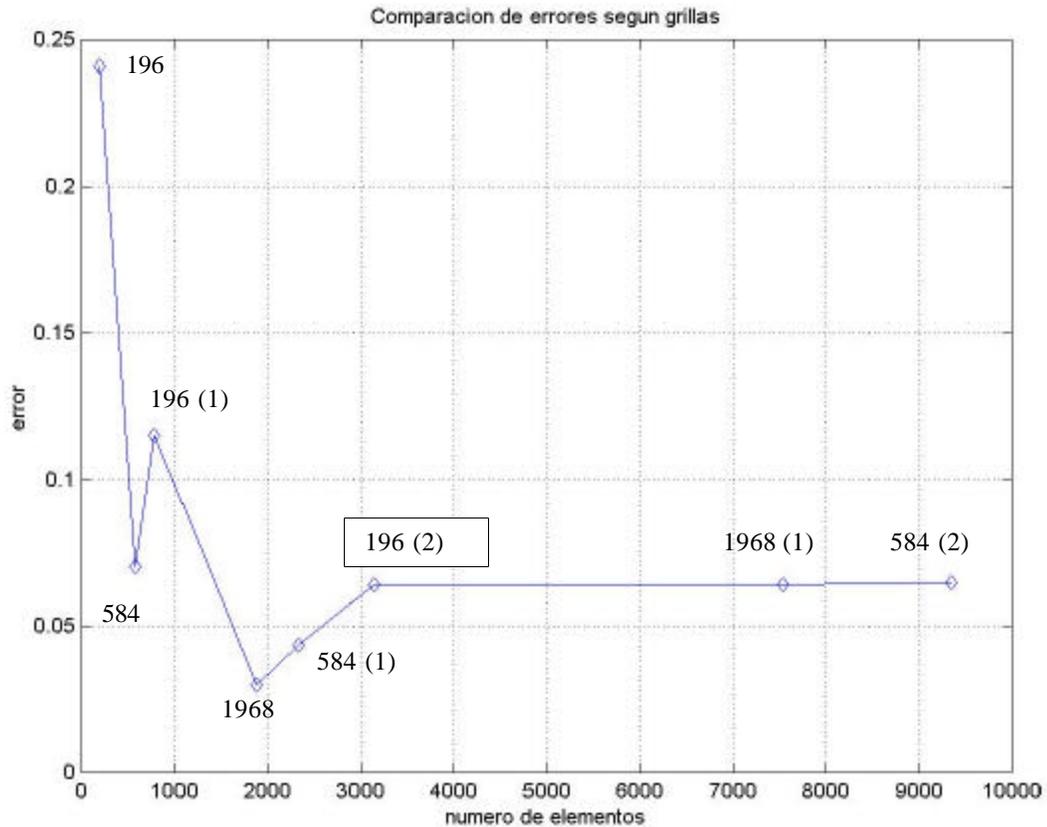


Figura 25 Comparación de errores según la cantidad de elementos de cada grilla utilizada, entre paréntesis se indica el número de refinamientos

### *En Resumen*

En este trabajo se estudiaron tres grillas de distintos orígenes, las cuales se refinaron y obtuvieron grillas con mayor cantidad de elementos, obteniéndose las siguientes conclusiones.

Primero, que al aumentar el número de elementos ya sea en la misma grilla de origen o en los subsiguientes refinamientos para mejorar el resultado de la integración, el error respecto al gu disminuye.

Segundo, a partir de cierta cantidad de elementos, por más que se refine no se tiene una ventaja significativa en la disminución del error comparado con la cantidad de elementos necesarios para disminuirlo en forma sustancial, obteniendo el mismo orden de error en las tres grillas con dos refinamientos. El estudio del porqué de esta cota para el error quedaría fuera de nuestro estudio pues los errores obtenidos son lo suficientemente pequeños. Sin embargo se puede conjeturar que la cota proviene de la parte del área que queda fuera de la grilla, o sea por la aproximación de la propia grilla a la región circular.

Si suponemos que el  $g_u$  calculado analítico es el objetivo a llegar, y el calculado a través de la matriz  $S$ , es  $g_u + \epsilon$  donde  $\epsilon$  lo consideramos como un ruido de discretización se tendría una relación señal a ruido de 65 dB, valor satisfactorio para nuestros cálculos. Considerando lo expuesto arriba decidimos utilizar la grilla de 1968 elementos por ser la que arrojó mejor resultado en cuanto al error para  $g_u$ .

#### 7.4 Inversión de la Matriz de Sensibilidad Normalizada

Para poder generar imágenes de conductividad normalizadas es necesario invertir la matriz  $F$ . Desafortunadamente,  $F$  será una matriz mal condicionada al igual que  $S$  por lo que será necesario regularizarla.

Una técnica muy potente de regularización e inversión de matrices mal condicionadas es el Método de Descomposición en Valores Singulares de una matriz (SVD), que ya fue presentado en el capítulo anterior.

La SVD de una matriz nos revela información muy útil relacionada a la naturaleza del mal condicionamiento en el caso de la EIT y nos da un indicador del nivel de regularización necesario.

Dado un sistema de ecuaciones lineales expresado en forma matricial:

$$Ax = b \quad \text{Ec. 7.16}$$

donde  $A^{m \times n}$  ( $m$  es el número de filas y  $n$  el número de columnas,  $n \geq m$ )

En términos de mínimos cuadrados, la solución a este sistema es encontrar el vector  $x$  que minimice la suma de los cuadrados:

$$\|b - Ax\|^2 \quad \text{Ec. 7.17}$$

si este sistema es no-singular, un único vector  $x$  verificará la ecuación 7.17, la pseudo inversa  $A^{-l}$  de la matriz  $A$  estará dada por la ecuación:

$$A^{-l} = (A^t \cdot A)^{-1} A^t \quad \text{Ec. 7.18}$$

Si el problema es no-singular pero mal condicionado,  $(A^t \cdot A)$  será singular y existirán infinitos vectores  $x$  que minimicen 7.17

Para ello es que recurrimos a técnicas de SVD como método para modificar el rango (y por lo tanto el mal condicionamiento de la Matriz) y finalmente obtener la inversa por mínimos cuadrados de la matriz.

El rango  $r$  de una matriz se define como el número de valores singulares no nulos en su descomposición; por lo tanto una matriz de rango completo tendrá  $r$  valores singulares.

El Número de Condición  $k$  de una matriz se define como el cociente entre el mayor valor singular y el menor. En la siguiente tabla se muestran los números de condición para las matrices de trabajo:

Número de condición de la matriz S		
<i>cantidad elementos</i>	<i>planos</i>	<i>derivadas</i>
196	9.6638E+17	2.5449E+35
492	1.3009E+17	2.9102E+34
1968	1.1849e+17	2.7320E+34

**Tabla 2** Números de condición de S

Respecto a lo observado en esta tabla corresponde hacer las siguientes apreciaciones. El número de condición de la matriz S depende fuertemente del método de cálculo de los potenciales. El método de la fórmula analítica de cálculo de los gradientes arroja números de condición mucho mayores, para una misma grilla, que el método de interpolación lineal. Esta observación nos lleva a descartar el primer método a favor del segundo. Por otra parte no se observan variaciones mayores en el número de condición ante variaciones en la cantidad de elementos de la grilla, constatándose este resultado para los dos métodos estudiados. Esto contradice las afirmaciones realizadas por Tang Meng Xing [12].

Para una matriz de rango no completo los valores singulares decrecerán fuertemente para valores mayores que un determinado valor singular. Los valores singulares generalmente no se reducen al valor cero, debido a que el ruido numérico se introduce durante los cálculos de  $AA^t$  y  $A^tA$ .

#### 7.4.1 Matriz Pseudo-Inversa

De la ecuación 6.4 se puede calcular la inversa de la siguiente forma:

$$S^{-1} = (U\Sigma V^t)^{-1} = (V^t)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^t \quad \text{Ec. 7.19}$$

Por lo tanto para una matriz no singular y bien condicionada su inversa se puede calcular mediante la fórmula:

$$S^{-1} = V\Sigma^{-1}U^t \quad \text{Ec. 7.20}$$

La inversa de la matriz diagonal  $\Sigma$  se obtiene reemplazando los elementos de la diagonal por sus inversos.

En el caso de la EIT la Matriz S tiene las siguientes características:

## IMPETOM I

- es una matriz mal condicionada y varios de sus valores singulares son muy pequeños
- es una matriz singular por lo tanto los valores singulares cuya posición sobrepasa el valor del rango no tienen sentido (aunque por el punto anterior no sean nulos).

Para el caso de matrices singulares los valores singulares sin sentido se excluyen en el cálculo de la inversa, es una forma de regularizar llamada Pseudo Inversa o Inversa de la Matriz Generalizada.

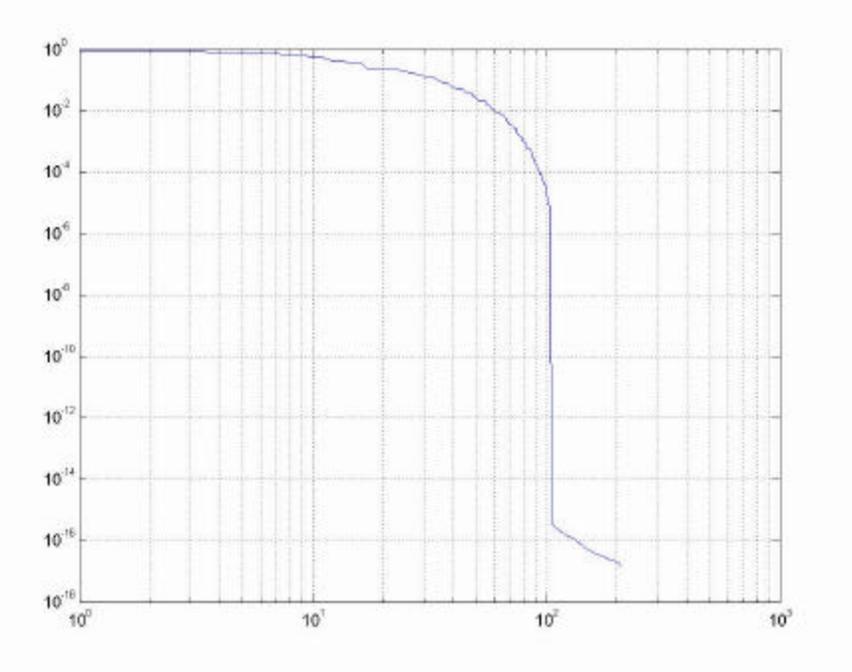


Figura 26 Valores singulares de la matriz de Sensibilidad

La matriz Pseudoinversa se calcula de la siguiente forma:

$$S^+ = V\Sigma^+U^t \tag{Ec. 7.21}$$

donde  $S^+$  es la mínima solución por mínimos cuadrados de la inversa de S y los elementos de la diagonal de  $\hat{O}^+$  se calculan de la siguiente forma:

$$\Sigma^+_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{s_i} & si \quad i \leq r \\ 0 & si \quad i > r \end{cases} \tag{Ec. 7.22}$$

En los casos de matrices mal condicionadas, la inclusión de valores singulares pequeños en la inversión genera problemas en la obtención de una solución estable. Esto se debe a que el menor valor singular está asociado con la medida peor condicionada del vector de medidas. Dado que las medidas inevitablemente contienen ruido, los valores inversos correspondientes en  $\hat{O}^+$  serán altos y amplificarán el ruido y la solución se empeorará. Debido a esto es necesario algún tipo de regularización de los valores singulares pequeños para las matrices mal condicionadas.

### 7.4.2 Regularización

Una de las técnicas más sencillas para regularizar el problema consiste en utilizar un método similar a la SVD; este método es mostrado en la ecuación 7.22, donde los valores singulares pequeños son excluidos para el cálculo de la matriz inversa e igualados a cero.

Esta técnica es conocida como SVD Truncada (TSVD), y puede ser considerada como una operación de filtrado en la cual los coeficientes del filtro son ceros y unos.

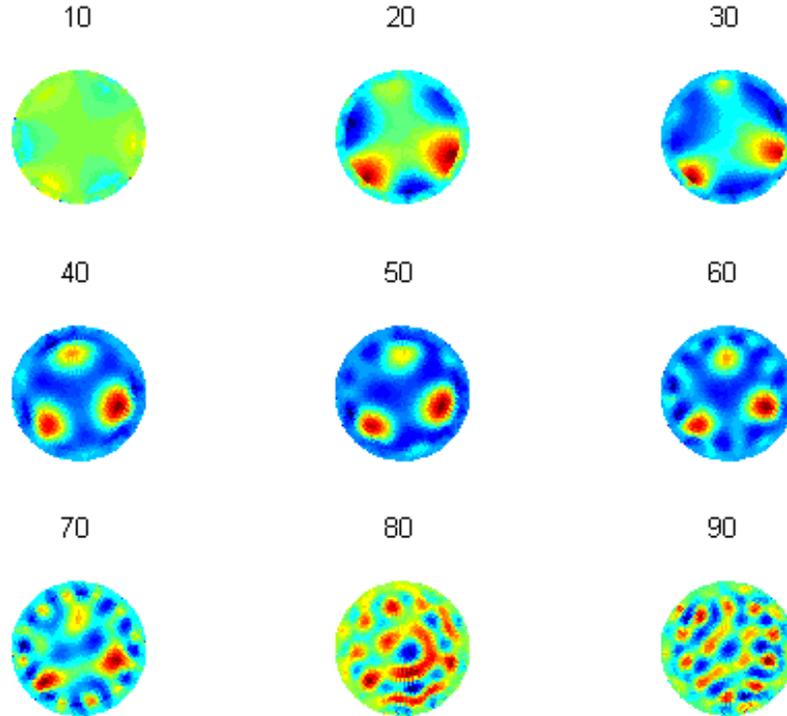


Figura 27 Reconstrucciones regularizadas mediante la TSVD tomando diferentes niveles de truncamiento.

De las 208 medidas realizadas 104 son independientes ( $n*(n-3)/2$  con  $n=16$ ) por lo que tenemos 104 valores singulares no nulos. Lo que muestra la figura 27 son reconstrucciones donde se disminuye de diez en diez el nivel de truncamiento (los valores singulares no nulos aumentan desde 10 a 90). Es decir, en la primera viñeta se muestra la reconstrucción con los primeros diez valores singulares distintos de ceros. En la siguiente veinte, así sucesivamente.

En cuanto al número de valores singulares truncados, existe un compromiso entre la precisión de la imagen obtenida y la posibilidad de lograr una reconstrucción aceptable evitando el mal condicionamiento. Dado un conjunto de datos, existe un máximo de valores singulares que pueden ser incluidos en la reconstrucción como se muestra en la figura 27, más allá de ese número la reconstrucción no es posible, obteniéndose imágenes completamente ruidosas. A medida que se disminuye la cantidad de valores singulares incluidos el problema se torna menos mal condicionado y se logran imágenes aceptables; sin embargo no se tiene una

estimación razonable de cuánta información se pierde con el truncamiento. Además existe una región en el conjunto de los valores de truncamiento en la que no se notan cambios en la reconstrucción de la imagen, podemos observarlo en las reconstrucciones entre 40 y 50 valores singulares no nulos. Si se sigue aumentando el truncamiento la imagen comienza a suavizarse hasta que los objetos a reconstruir se hacen irreconocibles.

En las evaluaciones de este método realizadas, se intentaron reconstruir medidas reales de fantasmas obtenidas en internet, consistentes en tres discontinuidades sobre una base de conductividad homogénea. Hay que resaltar que para diferentes conjuntos de medidas el nivel de truncamiento óptimo es diferente.

En vista de eso concluimos que el nivel de truncamiento necesario es muy dependiente de los datos medidos. Al no encontrar un método no supervisado apropiado para esta forma de reconstrucción optamos por abandonarlo. Por otra parte este método fue utilizado por Eyuboglu [15] sin obtener resultados prácticos satisfactorios.

Otro método que se estudió sin obtener buenos resultados fue el método de regularización de la varianza. Como se explica en el capítulo anterior este algoritmo trata de ecualizar todos los valores de covarianza. Esta técnica tiene una importante desventaja que impone una regularización muy fuerte suavizando las figuras en forma muy visible, lo que le hace perder contraste en las imágenes. Esto debido a que la matriz D toma valores demasiado grandes comparados con los valores singulares, según el algoritmo mostrado arriba para su cálculo. El método para elegir el parámetro de regularización empleado (OCV) no dio buenos resultados. Dependiendo de los datos de entrada este método encontró un mínimo en algunos casos y no en otros. Además, en los casos en que sí se encontró un mínimo, el parámetro de regularización resultante se dio con valores demasiado grandes comparados con los valores singulares del problema, en la figura 28 se muestra la función de OCV con un mínimo en 4.5 para el caso de la reconstrucción de la figura 29. En esta figura se puede observar una

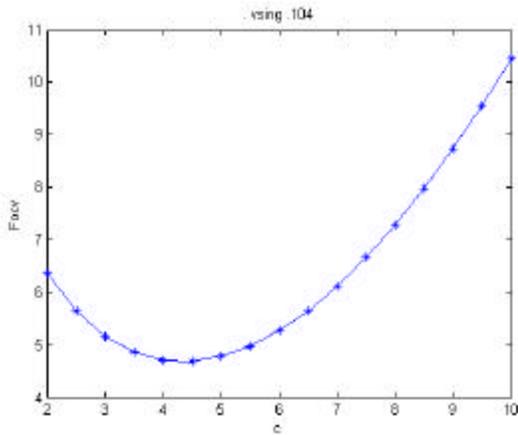


Figura 28 Gráfica de función de OCV

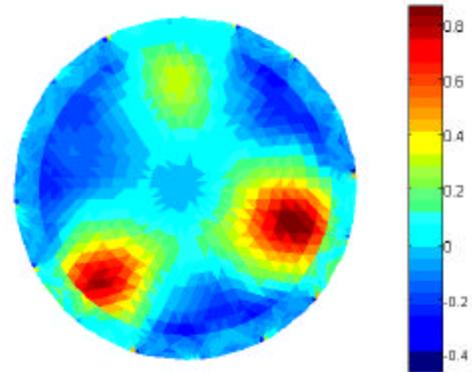


Figura 29 Reconstrucción

reconstrucción hecha con este método, es clara la no homogeneidad en la zona central así como en las zonas que rodean a las discontinuidades. Así mismo se ve el poco contraste en las fronteras de las zonas no homogéneas, mencionado anteriormente. La principal ventaja de este método es su inmunidad frente al ruido, como ya se explicó anteriormente el objetivo de este método es uniformizar la varianza de los valores de conductividad en toda la región de

## IMPETOM I

reconstrucción. Para verificar esta característica se simuló agregarle ruido Gaussiano con valor medio cero, con una SNR del orden de 90 db. Para esto se utilizó el mismo conjunto de medidas reales utilizadas de la figura 29, agregándole ruido y haciendo de esa forma 100 conjuntos diferentes<sup>10</sup>. A partir de estos conjuntos se hallaron las respectivas conductividades y se calculó y graficó los valores de la varianza para cada uno de los elementos como se muestra en la figura 30.

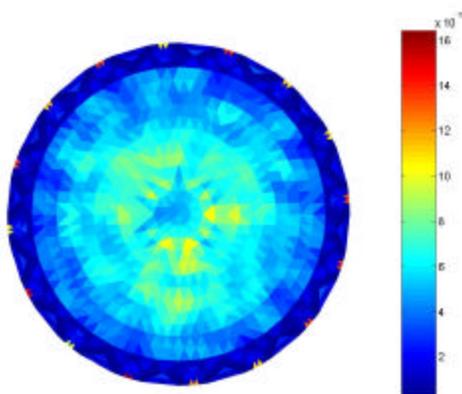


Figura 30 Varianza de los pixeles para 100 reconstrucciones utilizando el método de la Varianza

Es clara la uniformidad de la varianza en toda la región, con algunas discontinuidades en la zona central como era de esperar por la técnica de inyectar las corrientes.

Por último la técnica de Regularización que mejor se adaptó a nuestras necesidades fue la llamada Regularización de Tikhonov. Dando resultados aceptables para las distintas pruebas que se hicieron, el mecanismo automático de elección del parámetro de regularización utilizado se mostró efectivo en la gran mayoría de las pruebas. En este aspecto esta técnica aventajó a las dos anteriores dado que se mostró mucho más robusta, aunque una desventaja que tiene es su poca inmunidad al ruido como se verá más adelante.

---

<sup>10</sup> Notar que las medidas reales ya tienen ruido que es desconocido

# IMPETOM I

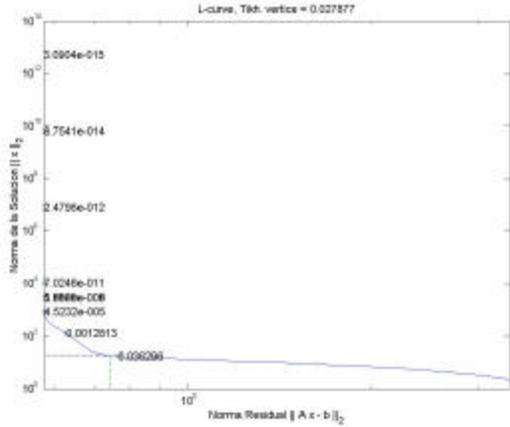


Figura 31 Gráfico del criterio de la curva\_L

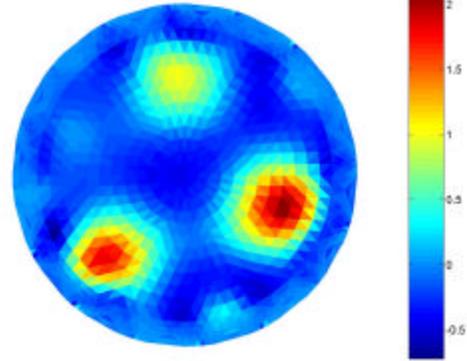


Figura 32 Reconstrucción utilizando el método de Tikhonov

En las figuras 31 y 32 muestran el proceso de reconstrucción para el conjunto de medidas. Primero se encuentra el vértice de la curva L que en este caso dio un valor de regularización de 0.0279. La figura 32 muestra la reconstrucción para dicho valor, a diferencia de los otros métodos se muestra la zona homogénea bien uniforme y así como las discontinuidades bien distinguibles y delimitadas. En la figura 33 se puede apreciar con claridad la reconstrucción como así también el ripple que se forma en la zona de los electrodos:

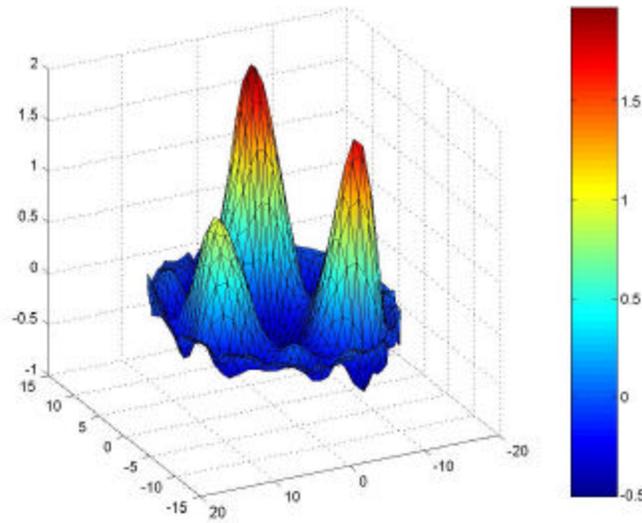


Figura 33 Reconstrucción vista en 3D luego de la regularización de Tikhonov

En lo que se refiere al ruido está técnica se muestra más vulnerable, ya que a diferencia de la varianza el algoritmo de regularizar no cuenta con información de ruido. Mientras que el algoritmo de la varianza trata de controlar el nivel de ruido para cada píxel, el parámetro de Tikhonov tiene menos efectos en los pixeles individuales como lo muestra la figura 34.

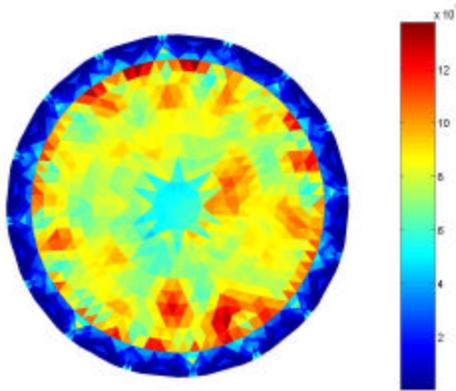


Figura 34 Varianza en cada píxel para 100 reconstrucciones utilizando el método de Tikhonov

Es de notar la poca uniformidad en la varianza para cada píxel en la Figura 34. Haciendo un estudio más exhaustivo nos muestra que las varianzas de cada píxel son mayores para Tikhonov que para el método de la varianza. Por lo que para este método es necesario precisión en las medidas.

### *Conclusiones*

Una vez estudiados los tres métodos se optó por la regularización de Tikhonov eligiendo el parámetro de regularización mediante el criterio de la curva L ya que es un método no supervisado que dio muy buenos resultados con las medidas reales con que contábamos. Si bien el método de la varianza también es no supervisado con muy buena inmunidad frente al ruido, pero impone una regularización muy fuerte que hace que se pierda contraste amplificando las discontinuidades en relación al área original.

### **7.5 Obtención de datos de prueba**

Para desarrollar y verificar nuestros métodos de reconstrucción de imágenes es necesario contar con datos de medidas de voltajes. Estos datos fueron obtenidos de dos formas, una de ellas a través de simulaciones hechas en Matlab y la otra a través de medidas reales obtenidas en internet. Es de resaltar la gran dificultad para obtener estos conjuntos de datos dado lo reciente del tema; todavía no hay bases de datos disponibles.

Para realizar las simulaciones se utilizaron rutinas de resolución del problema directo por medio del método de elementos finitos (FEM, *Finite Elements Method*). Por medio de estas simulaciones se lograron conjuntos de voltajes aptos para la validación de los métodos de reconstrucción implementados.

Con las medidas reales se pudo obtener una evaluación más cercana a la implementación final, teniendo en cuenta, sin embargo que esta evaluación se vio restringida por la poca información disponible, en capítulo 10 se hará un análisis más detallado de las distintas reconstrucciones comparándolas con los restantes métodos de reconstrucción analizados.

# 8 Implementación del método de retroproyección

## 8.1 Introducción

En el presente capítulo se describe la implementación de un algoritmo de reconstrucción de distribución de conductividades relativas mediante la utilización del método de retroproyección (del inglés “backprojection”).

## 8.2 El método de retroproyección

El método retroproyección consiste en proyectar sobre líneas equipotenciales las perturbaciones en las diferencias de potencial medidas, respecto a diferencias de potencial correspondientes a una conductividad uniforme. Estas últimas diferencias de potencial pueden ser medidas o calculadas.

Se utilizan diferencias de potencial medidas entre electrodos adyacentes generadas por un par de electrodos utilizados como inyectores de corriente. En la práctica en lugar de medir los voltajes sobre los electrodos es más útil medir las diferencias de voltajes entre pares de electrodos adyacentes como una estimación del gradiente de voltaje sobre la frontera de la región [6]. Medir las diferencias de voltaje no solo que es más fácil que realizar las medidas absolutas sino que además las medidas de gradientes son los datos necesarios del algoritmo de reconstrucción.

En la figura 35 se muestra un perfil de la diferencia de voltajes sobre la frontera de la región a reconstruir para una configuración de 32 electrodos.

En lugar de graficar el valor del gradiente sobre la frontera se graficó su logaritmo.

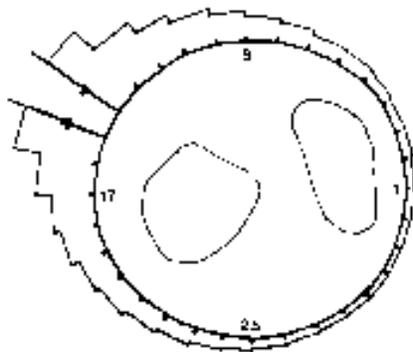


Figura 35 perfil del logaritmo de gradientes de voltaje en la frontera

Se considera:

- $g_u(\mathbf{q})$  medidas del gradiente de potencial sobre una frontera circular para una distribución de conductividades uniforme. Se aproximan por las diferencias de voltaje medidas entre electrodos
- $g_m(\mathbf{q})$  medidas del gradiente de potencial sobre la misma frontera para una distribución de conductividades no uniforme pero isotrópica. Vale el mismo comentario que arriba.

Estos perfiles de gradiente de potencial sobre la frontera son diferentes. Retroproyectar  $g_m(\mathbf{q})$  significa encontrar la distribución más simple de la propiedad medida (en este caso la conductividad) que pueda describir las medidas observadas.

En la figura 36 se muestran las equipotenciales generadas por el par de electrodos de inyección de corriente de la figura 35 para una distribución simple de conductividad. Como se mostró en el capítulo 5.4  $g_m(5)$  difiere de  $g_u(5)$  debido fundamentalmente a las perturbaciones en la conductividad en los puntos que se encuentran entre las equipotenciales que finalizan en los electrodos 5 y 6.

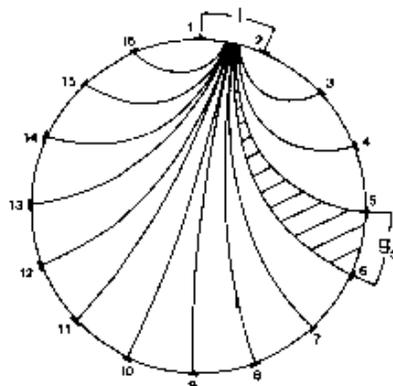


Figura 36 equipotenciales generadas por el primer par de inyección de corrientes

Dicha variación se puede expresar como:

$$\frac{g_m(5)}{g_u(5)} \quad \text{variación de la conductividad o de forma equivalente}$$

$$\ln\left(\frac{g_m(5)}{g_u(5)}\right) = \ln(g_m(5)) - \ln(g_u(5)) \quad \text{variación logarítmica de la conductividad}$$

En la figura 37 se puede apreciar el perfil de las variaciones de potencial sobre la frontera de la región en cuestión el cual se puede retroproyectar a lo largo de las equipotenciales.

Las equipotenciales mostradas en la figura 36 fueron calculadas para una conductividad uniforme, se asume en el método que dado que las variaciones son muy pequeñas las equipotenciales no cambiarán sustancialmente su forma.

Por lo que  $g_m$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$g_m = g_p + g_u \quad \text{Ec. 8.1}$$

por lo tanto:

$$\ln\left(\frac{g_m}{g_u}\right) = \ln\left(1 + \frac{g_p}{g_u}\right) \quad \text{Ec. 8.2}$$

para el caso que  $g_p \ll g_u$ :

$$\ln\left(1 + \frac{g_p}{g_u}\right) \approx \frac{g_p}{g_u} = \frac{g_m - g_u}{g_u} \quad \text{Ec. 8.3}$$

En otras palabras la perturbación normalizada del gradiente de voltaje es retroproyectada para obtener una imagen retroproyectada de la perturbación logarítmica en la conductividad.

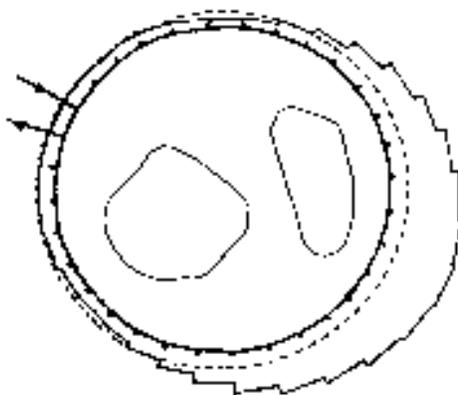


Figura 37 perfil de variaciones de potencial sobre la frontera normalizado

En la figura 38 se muestran los cambios en las medidas de voltajes sobre la superficie para cada una de las 16 posiciones de inyección de corriente.

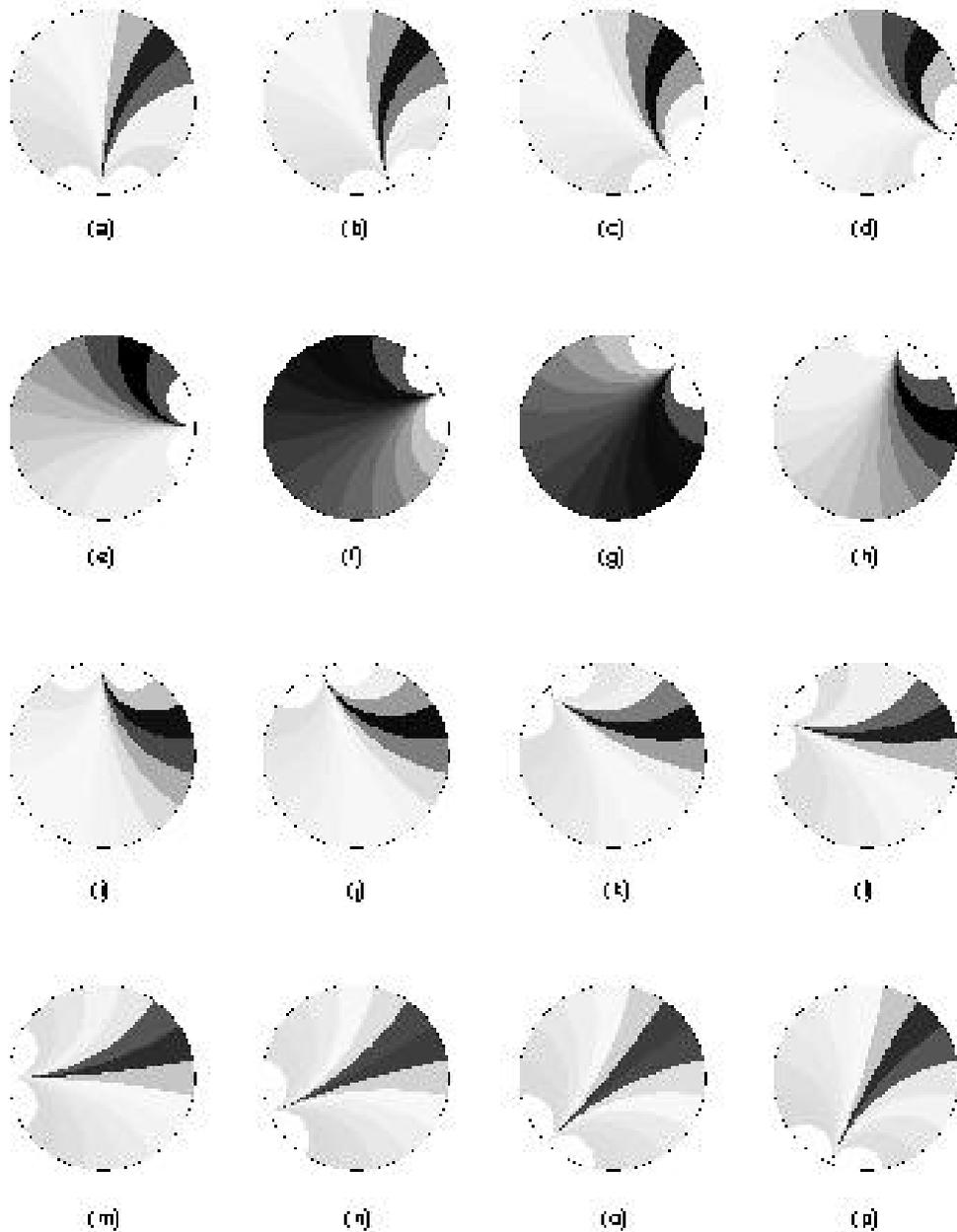


Figura 38 Retroproyección de las medidas de voltaje sobre la superficie para cada una de las 16 inyecciones de corriente

A todos los píxeles (elementos) ubicados en la región definida por 2 equipotenciales adyacentes se le asigna el valor correspondiente al cambio de potencial correspondiente:

$$R(n) \leftarrow \frac{g_m - g_u}{g_u} \tag{Ec. 8.4}$$

Este procedimiento lleva a definir máscaras asociadas a cada par de electrodos de medida para cada una de las posiciones de inyección de corriente. Dada una posición de la inyección de corriente y un par de electrodos de medida, el conjunto de píxeles que

pertenecen a la región comprendida entre las equipotenciales que pasan por los electrodos de medida definen la máscara asociada.

Se puede observar que el máximo cambio en las medidas del potencial en la superficie ocurre para la región definida por las equipotenciales que contienen la perturbación de la conductividad (color más oscuro en la figura 38).

Las restantes medidas también se ven afectadas por la perturbación y también contribuirán a la imagen final.

La imagen se forma mediante la superposición de cada una de las 16 proyecciones en una sola imagen. Dicha imagen se caracteriza por ser borrosa y contener manchas o desperfectos los cuales se pueden filtrar posteriormente a la reconstrucción o filtrar los datos previamente (filtered back-projection).

La expresión matemática del procedimiento de retroproyección a través de las equipotenciales explicado arriba es la siguiente, en [17] se puede ver un desarrollo matemático para esta fórmula a partir de la formulación planteada en 5.4:

$$R(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N T_{ik}(n) \left[ \frac{gm_{ik} - gu_{ik}}{gu_{ik}} \right] \quad \text{Ec. 8.5}$$

donde:

$R(n)$  es la perturbación logarítmica en la conductividad reconstruida en el elemento  $n$  de la grilla.

$k = 1..N$  define los pares de electrodos de medidas de voltaje

$i = 1..M$  define los pares de electrodos de inyección de corriente

$gm_{ik}$  es la diferencia de potencial medida sobre el  $k^{esimo}$  par de electrodos cuando inyecto corriente por el  $i^{esimo}$  par de electrodos de inyección de corriente.

$gu_{ik}$  es la diferencia de potencial medida sobre el  $k^{esimo}$  par de electrodos cuando inyecto corriente por el  $i^{esimo}$  par de electrodos de inyección de corriente, para una distribución homogénea de conductividad.

$T_{ik}(x, y) = 1$  si el punto  $(x, y)$  del plano de la imagen pertenece a la región delimitada por las equipotenciales que terminan sobre los electrodos pertenecientes al  $k_{esimo}$  par de electrodos de medida cuando se inyecta corriente por el  $i_{esimo}$  par de electrodos de corriente.

$T_{ik}(x, y) = 0$  si el punto  $(x, y)$  del plano de la imagen no pertenece a la región delimitada por las equipotenciales que terminan sobre los electrodos pertenecientes al  $k_{esimo}$  par de electrodos de medida cuando se inyecta corriente por el  $i_{esimo}$  par de electrodos de corriente.

El conjunto de valores  $T_{ik}$  representa la máscara asociada a la medida definida por la posición de inyección de corriente  $i$  y la posición de medida  $k$ .

Estas máscaras fueron calculadas previamente y almacenadas en una matriz de tamaño  $(M \times N) \times (\text{número de píxeles})$ ; esa matriz tiene unos en los elementos pertenecientes a la región entre equipotenciales y ceros en los elementos fuera de ella, para la medida dada por el índice de la fila de la matriz. De esa manera la implementación final del algoritmo fue:

$$R(n) = \exp \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{MN} T_{in} \left[ \frac{gm_i - gu_i}{gu_i} \right]$$

Ec. 8.6

$$\frac{c(n)}{c_u(n)} = \exp(-R(n))$$

Donde las 208 medidas se referenciaron mediante un único índice.

A continuación se muestra un ejemplo de reconstrucción utilizando nuestra implementación del método de retroproyección:

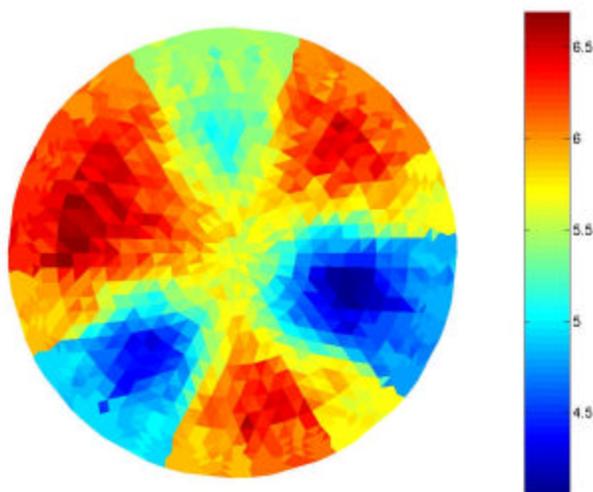


Figura 39 Reconstrucción para datos generados con fantasmas usando el método de retroproyección

### 8.3 Definición de la grilla

Para la elección de la grilla se utilizaron los mismos criterios empleados en el caso del método de la matriz de sensibilidad. Esto tiene la ventaja de hacer más sencillas las evaluaciones de las pruebas comparativas de los distintos métodos. Esto se verá en el capítulo 10.

### 8.4 Cálculo del potencial en los elementos de la Grilla

El cálculo de las máscaras hizo necesario el cálculo de las distribuciones de potencial absoluto para las diferentes medidas, con conductividad uniforme, con el objeto de discriminar la pertenencia de cada píxel a la región definida por los electrodos de medida apropiados.

Este cálculo fue realizado mediante el método analítico (método de la sumatoria) y también mediante el método de elementos finitos, arrojando ambos métodos resultados equivalentes. En la implementación final se utilizaron los potenciales derivados del método analítico.

### 8.5 Determinación de las máscaras

La determinación de las máscaras asociadas a cada inyección implica hallar, para cada píxel de la imagen, el par de equipotenciales entre las que queda comprendido (ver figura 36). Para realizar esa determinación para el píxel  $k$ , se halla el mínimo de la expresión

$$D^2(j) = [U(k) - Ua(j)]^2 + [U(k) - Ub(j)]^2 \quad \text{Ec. 8.7}$$

siendo  $U(k)$  el potencial absoluto del píxel  $k$ ,  $Ua(j)$  y  $Ub(j)$  son los potenciales absolutos en los electrodos que forman el par  $j$ ,  $j$  indexa dichos pares de electrodos.

El valor de  $j$  que minimiza esa expresión asegura que la equipotencial que pasa por el píxel  $k$  queda comprendida entre las equipotenciales que pasan por los electrodos del par  $j$ .

En la figura 40 se muestra la máscara asociada a las medidas realizadas inyectando corriente por el primer par de electrodos.

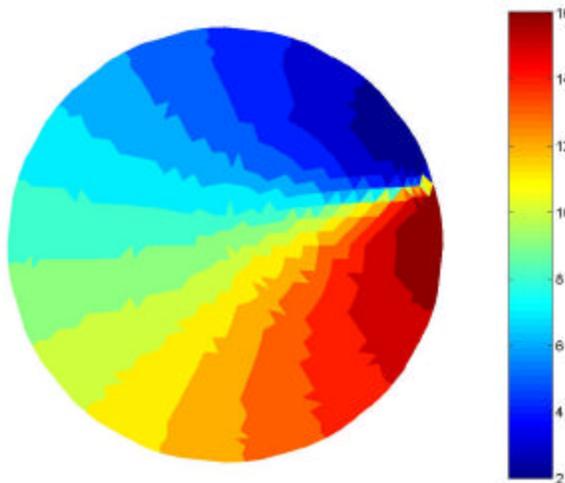


Figura 40 Máscara correspondiente a la inyección por el primer par de electrodos

### 8.6 Filtrado

En la gran mayoría de los trabajos revisados sobre este método de reconstrucción se menciona la necesidad de agregar un filtrado adicional a la mera retroproyección de los voltajes en la frontera [6, 16 y 17]. Esta idea proviene del algoritmo de reconstrucción empleado en tomografía computada, en el que se emplea esencialmente un filtrado pasabajos con la idea de eliminar artefactos<sup>11</sup>.

<sup>11</sup> Del inglés “artifacts”

En E.I.T. se emplea ampliamente este mismo concepto de filtrado; sin embargo, al revisar la poca bibliografía encontrada al respecto se concluye que no existe una única manera de implementar dicho filtrado, encontrándose diferencias en los desarrollos empleados.

Según [6] la idea que subyace detrás del filtrado es uniformizar la distribución angular de retroproyecciones en cada píxel de la imagen, en el método de Retroproyección la retroproyección se realiza a lo largo de equipotenciales que atraviesan la región y que son curvas como lo muestra la figura 40, Asociado a cada píxel de la imagen hay una dirección de retroproyección, identificada mediante la dirección de la equipotencial apropiada que pasa por ese punto. Hay  $N$  retroproyecciones a través de cada píxel de la imagen y es importante apreciar que la distribución angular de esas retroproyecciones no es uniforme. Por ejemplo, como todas las equipotenciales son normales a la periferia, en aquellos píxeles cercanos a la frontera las equipotenciales presentarán una mayor densidad en la dirección cercana a la normal a la frontera. Si no se logra uniformizar esta densidad angular se obtienen imágenes con artefactos.

Se muestra en la figura 42 una reconstrucción llevada a cabo implementando la idea anterior para el filtrado y la comparación con el algoritmo de reconstrucción no filtrado (figura 41):

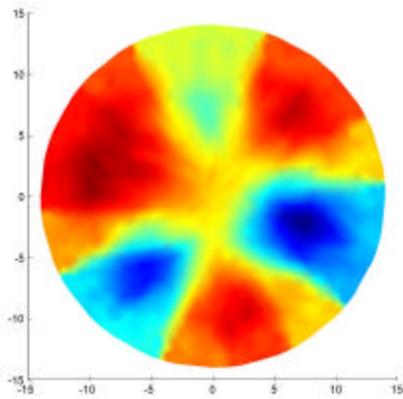


Figura 41 Reconstrucción sin utilizar filtro

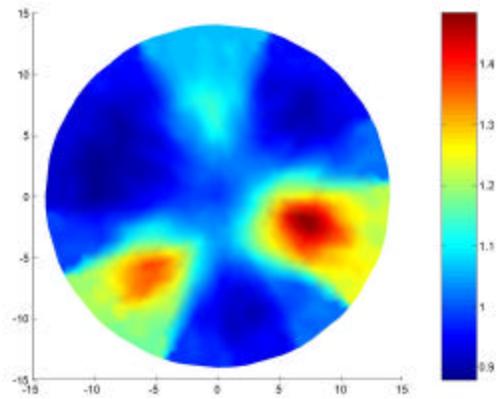


Figura 42 Reconstrucción utilizando filtro

En la figura 42 no se observan mejoras significativas respecto al algoritmo de retroproyección sin filtrado. En particular, persisten artefactos en las cercanías de la periferia de la imagen. Se observa una mejora en el centro de la imagen donde la reconstrucción de la izquierda parece ser más suave. Otras pruebas con distribuciones no homogéneas en la zona central mostraron que este filtro empeoró la resolución de la imagen en la zona central de la imagen, por otra parte se observó que dos perturbaciones muy cercanas se hacen menos distinguibles por lo que se decidió no utilizarlo en la DEMO IMPETOM I.

Otra forma de encarar la implementación de filtros es la siguiente. Dado que la reconstrucción mediante retroproyección tiene una resolución variable según la posición

(ver capítulo 5.4), el filtro de restauración debe tener en cuenta esta dependencia con la posición.

El algoritmo de reconstrucción puede ser visto de la siguiente forma:

$$c_n = EBg_n \tag{Ec. 8.8}$$

donde E es una representación empírica del filtro de restauración y B es la expresión matricial de la ecuación (1.5). Mediante el filtro E se quiere atacar el problema de la resolución variable de este algoritmo.

Suponiendo la existencia del vector de datos transformados  $g_n'$  que conduciría a una imagen libre del problema de la dependencia espacial

$$c_n = Bg_n' \tag{Ec. 8.9}$$

de la ecuación 4.6.8 ( $g_n = Fc_n$ ) obtenemos:

$$g_n = FBg_n' \tag{Ec. 8.10}$$

por lo tanto:

$$g_n' = (FB)^{-1} g_n \tag{Ec. 8.11}$$

En realidad esta transformación aplicada a los datos se transforma en el siguiente filtro:

$$c_n = B(FB)^{-1} g_n \tag{Ec. 8.12}$$

La etapa de filtrado en el método “filtered back-projection” se efectúa sobre las medidas previamente a la reconstrucción. No es necesaria la utilización del filtro empírico, que se aplicaba después de la reconstrucción.

En los trabajos revisados se observaron mejoras significativas en la resolución de la imagen comparándola con los métodos de filtrado existentes, aunque también se observó la introducción de artefactos.

Un problema asociado a la implementación efectiva de este método de filtrado es el mal condicionamiento de la matriz  $FB$ . Se intentó atacar este problema usando la descomposición en valores singulares de esa matriz. Esto permitió suprimir los valores singulares no significativos de la misma manera que se hizo en la implementación del algoritmo de la matriz de sensibilidad.

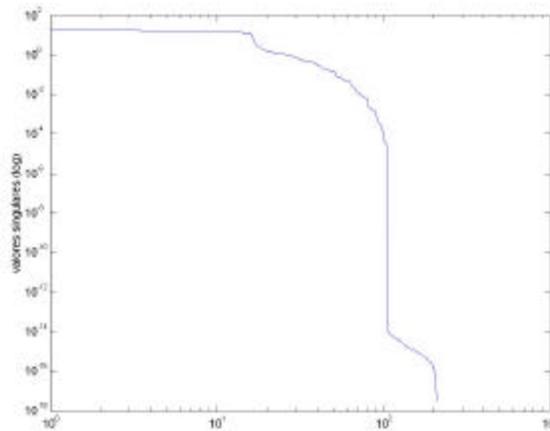


Figura 43 Variación de los valores singulares de la matriz de filtrado  $FB$

En la figura 43 se muestra la variación de los valores singulares de la matriz  $FB$ . Claramente, la evolución de los mismos tiene una caída abrupta a partir del valor 104, lo que era de esperarse para un sistema de medidas adyacente de dieciséis electrodos. El rango

## IMPETOM I

de la matriz, entonces, es 104, igual al número de medidas independientes, según el teorema de reciprocidad.

Surge entonces la necesidad de implementar un truncamiento en la cantidad de valores singulares utilizados similar a la realizada para el método de la matriz de sensibilidad.

A continuación se muestran algunas reconstrucciones con diferentes niveles de truncamiento, para los mismos datos de medidas reales usados en las figuras 41 y 42:

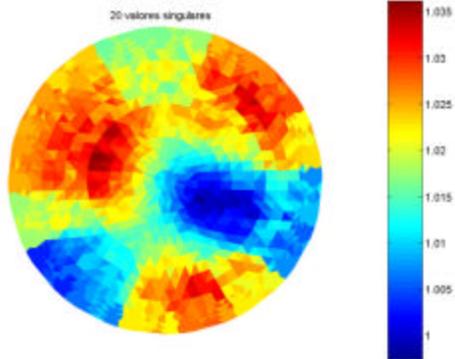


Figura 44 20 valores singulares

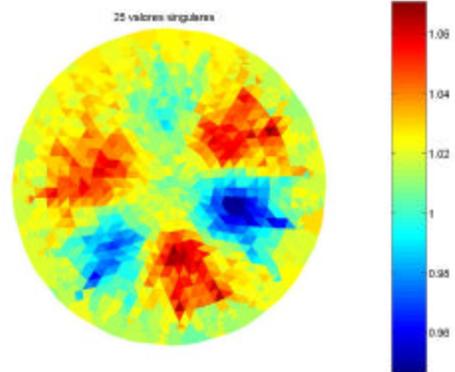


Figura 45 25 valores singulares

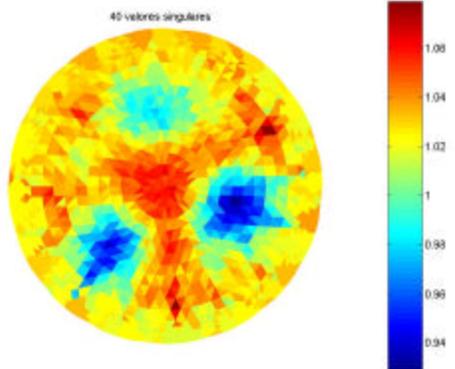


Figura 46 40 valores singulares

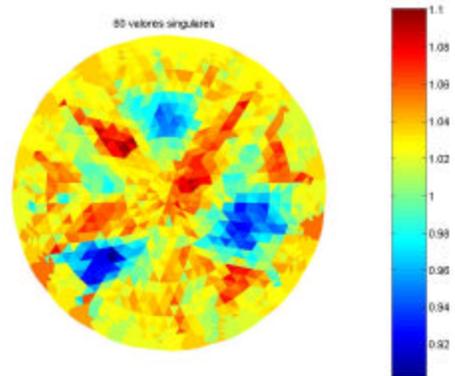


Figura 47 60 valores singulares

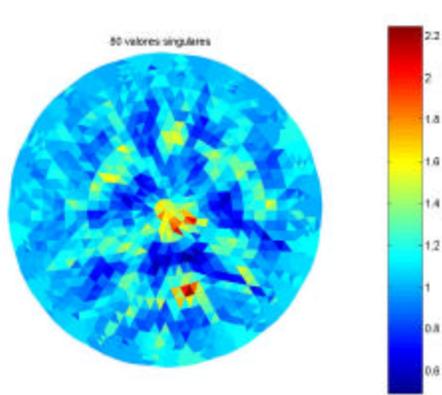


Figura 48 80 valores singulares

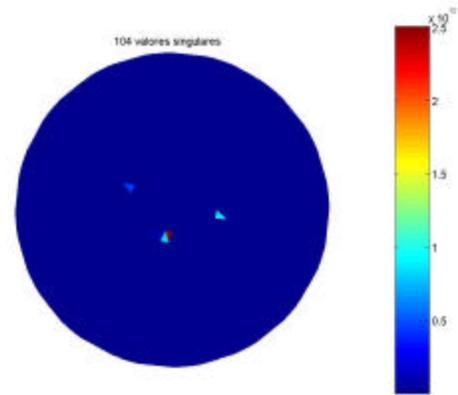


Figura 49 104 valores singulares

En las figuras anteriores es posible observar la fuerte dependencia de la reconstrucción frente a la cantidad de valores singulares utilizada en la misma. Se obtienen resultados similares a las obtenidas con el método de la matriz de sensibilidad. Con pocos valores singulares la imagen se deforma. Con una cantidad intermedia se obtienen los resultados más aceptables. Finalmente con muchos valores singulares se encuentra cada vez más inestabilidad hasta que es imposible obtener una imagen útil.

En las imágenes aceptables conseguidas mediante este filtrado se observa una calidad inferior respecto a aquellas obtenidas mediante el algoritmo de reconstrucción de retroproyección básico. Este hecho sumado al de la necesidad de supervisión para encontrar el número óptimo de valores singulares a tener en cuenta hicieron que descartáramos este método de filtrado.

## 9 Implementación de Newton Raphson

Con la implementación de este método lo que se intentó fue hallar la solución a la ecuación  $V = h(\mathbf{r})$  que es no lineal a través de un método no lineal como lo es el método de Newton Raphson. La actualización del vector de conductividades es parte central de este algoritmo por lo que haremos una especial descripción del procedimiento empleado, para luego explicar directamente la implementación.

### 9.1 Resolución del problema directo

El paso dos del algoritmo implica la resolución del problema directo, o sea resolver la ecuación:

$$\nabla \cdot (\mathbf{s} \nabla \Phi) = 0 \quad \text{Ec. 9.1}$$

Para hallar el campo de potenciales se recurrió al Método de Elementos Finitos (Finite Element Method), existen otras técnicas para la resolución de este problema por ejemplo: Método de Elementos en la Frontera (Boundary Element Method) esta técnica usada en la resolución del problema directo se la puede encontrar en [24], pero debido a la complejidad de los cálculos la primera técnica es la más usada [3 y 21].

En el apéndice B se puede leer parte de la teoría de esta técnica así como ejemplos sencillos.

### 9.2 Modelado del Electrodo

Para resolver el problema directo necesitamos modelar el comportamiento físico de los electrodos para de esa forma llegar a formulación más real en las condiciones de frontera. Actualmente hay cuatro modelos de electrodos aplicables a la EIT.

### 9.2.1 Modelo continuo

Este es una idealización de los electrodos donde se especifican los patrones de inyección de corriente pero no se identifican electrodos discretos. Se asume que la corriente inyectada es una función continua del ángulo que determina el punto de inyección sobre la periferia.

$$j(\mathbf{x}) = C \cos(k\mathbf{x}) \quad \text{Ec. 9.2}$$

Donde  $j$  es la corriente inyectada y  $C$  una constante. Con datos experimentales se ha visto que este modelo sobrestima las resistividades más de un 25%. Esto es porque el efecto de los electrodos es ignorado totalmente [3 y 21].

### 9.2.2 Modelo Gap

Este modelo asume que la corriente  $j$  inyectada es:

$$j = \begin{cases} \frac{I_l}{|e_l|} & x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \\ 0 & x \in \partial\Omega / \bigcup_{l=1}^L e_l \end{cases} \quad \text{Ec. 9.3}$$

donde  $|e_l|$  es el área del  $l$ -ésimo electrodo,  $I_l$  es la corriente inyectada por ese electrodo y  $L$  el número de electrodos. Este método como el anterior también sobre estima la resistividad en el dominio porque ignoran el efecto de ‘shunting’ de los electrodos. Es decir, el metal de los electrodos presenta una resistencia baja para el camino de la corriente [21].

### 9.2.3 Modelo Shunt

Este modelo toma en cuenta el efecto del pasaje de corriente por los electrodos, tomando el potencial en el electrodo constante. Por lo que la condición de borde dada por la Ec. 9.3 puede ser escrita:

$$\int_{e_l} \mathbf{s} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = I_l, \quad x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \quad \text{Ec. 9.4}$$

$$u = U_l \quad x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \quad \text{Ec. 9.5}$$

Donde  $U_l$  es el voltajes medido en el  $l$ -ésimo electrodo. La desventaja principal de este modelo radica de no reproducir los voltajes reales a la precisión que se los puede medir y esta discrepancia aumenta y empeora la performance del modelo al aumentar el número de electrodos, inclusive peor que el modelo de Gap para 16 electrodos [21].

### 9.2.4 Modelo completo del Electrodo

Este modelo toma en cuenta el efecto de pasaje en el electrodo así como también la impedancia de contacto entre el electrodo y la piel. El modelo consiste en las siguientes condiciones de frontera:

$$u + z_l \mathbf{s} \frac{\partial u}{\partial \nu} = U_l \quad x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \quad \text{Ec. 9.6}$$

$$\int_{e_l} \mathbf{s} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = I_l \quad x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \quad \text{Ec. 9.7}$$

$$\mathbf{s} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad x \in \partial\Omega / U_{l=1}^L e_l \quad \text{Ec. 9.8}$$

Donde  $z_l$  es la impedancia efectiva de contacto entre el  $l$ -ésimo electrodo de contacto y la piel.

En nuestra implementación utilizamos el modelo *Gap*. Si bien el modelo de electrodo completo aparece como el que más se aproxima al problema real, involucra parámetros desconocidos y difíciles de medir como los son las impedancias de contacto. Ante la imposibilidad de obtener valores para esos parámetros optamos por elegir el modelo *Gap* por tener una forma más sencilla para ser calculada dados los tiempos en que nos habíamos propuesto el estudio del método de elemento finito y su implementación<sup>12</sup>.

Otra condición a imponer sobre los electrodos son las condiciones de Kirchoff en las corrientes:

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0 \quad \text{Ec. 9.9}$$

E imponer que un voltaje de referencia para preservar la estabilidad y unicidad de la solución:

$$\sum_{l=1}^L U_l = 0 \quad \text{Ec. 9.10}$$

Por lo que el modelo completo del problema queda según las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot (\mathbf{s} \nabla u) = 0 \quad \text{Ec. 9.11}$$

$$j = \begin{cases} \frac{I_l}{|e_l|} & x \in e_l, l = 1, 2, \dots, L \\ 0 & x \in \partial\Omega / U_{l=1}^L e_l \end{cases} \quad \text{Ec. 9.12}$$

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0 \quad \text{Ec. 9.13}$$

<sup>12</sup> Ver capítulo 12 ‘Tiempos y Costos’

$$\sum_{l=1}^L U_l = 0 \quad \text{Ec. 9.14}$$

Para encontrar la distribución de resistividad, es decir resolver el problema inverso, el problema directo debe ser resuelto para el modelo físico escogido. En casos simples como por ejemplo geometrías circulares con distribución de conductividad homogénea, se pueden encontrar soluciones analíticas para el problema directo. Ejemplo de esto fue nuestra implementación del método de reconstrucción de la matriz de sensibilidad. Sin embargo en la mayoría de las situaciones reales este no es el caso y por lo tanto se debe recurrir a métodos numéricos que puedan afrontar la no linealidad del problema.

El método de elementos finitos es un método apropiado para resolver ecuaciones en derivadas parciales con geometrías complejas y condiciones de frontera no triviales.

### 9.3 Formulación variacional

El procedimiento en el FEM comienza con la formulación variacional (de Galerkin) del problema, también denominada formulación débil [24].

Para llegar a esta formulación se parte de la expresión:

$$v[\nabla \cdot (\mathbf{s}\nabla u)] = 0 \quad \text{Ec. 9.15}$$

Siendo  $v$  una función escalar arbitraria del dominio  $\tilde{U}$ , suficientemente diferenciable.

Desarrollando la ecuación anterior se llega a:

$$v[\nabla \cdot (\mathbf{s}\nabla u)] = \nabla (v\mathbf{s}\nabla u) - \mathbf{s}\nabla u \cdot \nabla v \quad \text{Ec. 9.16}$$

Integrando en la región  $\tilde{U}$ :

$$\iint_{\Omega} v[\nabla \cdot (\mathbf{s}\nabla u)] ds = \iint_{\Omega} \nabla (v\mathbf{s}\nabla u) - \iint_{\Omega} \mathbf{s}\nabla u \cdot \nabla v \quad \text{Ec. 9.17}$$

Aplicando la Ec. 0.15 :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{s}\nabla u \cdot \nabla v = \iint_{\Omega} \nabla (v\mathbf{s}\nabla u) \quad \text{Ec. 9.18}$$

Mediante el teorema de la divergencia de Gauss se llega a:

$$\iint_{\Omega} \mathbf{s}\nabla u \cdot \nabla v ds = \oint_{\partial\Omega} v\mathbf{s}(\nabla u \cdot \hat{n}) dl \quad \text{Ec. 9.19}$$

Donde  $\hat{n}$  el vector normal saliente a la frontera. La expresión  $\mathbf{s}(\nabla u \cdot \hat{n})$  es proporcional a la densidad lineal de corriente que atraviesa la periferia de la región, que es nula fuera de los

electrodos, por lo que la integral en el lado derecho de la ecuación anterior se reduce a la integral sobre los electrodos:

$$\iint_{\Omega} \mathbf{s} \nabla u \cdot \nabla v \, ds = \sum_{l=1}^L \int_{e_l} v \mathbf{s} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \, dl \quad \text{Ec. 9.20}$$

Asumiendo aquí las hipótesis del modelo gap, en que  $j = \mathbf{s} \nabla u = \frac{I_l}{e_l}$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  se llega finalmente a la formulación variacional buscada:

$$\iint_{\Omega} \mathbf{s} \nabla u \cdot \nabla v \, ds = \sum_{l=1}^L \frac{I_l}{e_l} \int v \, dl \quad \text{Ec. 9.21}$$

La representación continua del problema a la que se llega se transforma en una formulación discreta usando el método de elementos finitos. En FEM el dominio  $\hat{U} \in R^2$  es primeramente dividido en pequeños elementos que en nuestro caso son triángulos, aunque cabe mencionar que también se pueden emplear elementos de geometrías más complejas como rectángulos o hexágonos.

La aproximación finita  $u^h$  de la solución  $u(x)$  en el subespacio de dimensión finita  $Q^h$  (donde  $Q$  es el subespacio generado por las funciones bases<sup>13</sup>) puede ser escrita en la forma:

$$u^h = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \mathbf{j}_i \quad \text{Ec. 9.22}$$

Donde  $\mathbf{j}_i = \mathbf{j}_i(x)$  son funciones base del subespacio  $Q^h$ ,  $N$  es la cantidad de nodos en la grilla y los  $\mathbf{a}_i$  son los coeficientes a determinar. En nuestro trabajo usamos funciones lineales a trozos. Las funciones base lineales  $\mathbf{j}_i$  toman el valor 1 en el nodo  $i$  y cero en los otros nodos como lo muestra la figura 50

---

<sup>13</sup> Ver referencia apéndice B

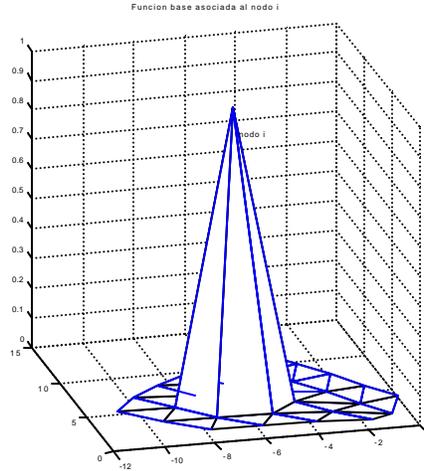


Figura 50 Función base asociada al nodo i

Retomando la formulación variacional de la ecuación 0.22 y realizando las sustituciones

$u = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \mathbf{j}_i$  y  $v = \mathbf{j}_i$ , siendo  $\mathbf{j}_i$  la función base asociada a un nodo arbitrario i, se obtiene:

$$\iint_{\Omega} \mathbf{s} \sum_{k=1}^N \mathbf{a}_k \nabla \mathbf{j}_k \cdot \nabla \mathbf{j}_i ds = \sum_{l=1}^L \frac{I_l}{e_l} \int \mathbf{j}_i dl \quad \text{Ec. 9.23}$$

Reordenando :

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{a}_k \iint_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{j}_k \cdot \nabla \mathbf{j}_i ds = \sum_{l=1}^L \frac{I_l}{e_l} \int \mathbf{j}_i dl \quad \text{Ec. 9.24}$$

Definimos la matriz de rigidez<sup>14</sup> del sistema  $A \in R^{N \times N}$  (ver Apéndice B) como

$A(i, j) = \iint_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \mathbf{j}_j ds$ , el vector de parámetros  $\bar{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N]^T \in R^N$  y el vector de

corrientes  $I \in R^N$  como  $I(i) = \sum_{l=1}^L \frac{I_l}{e_l} \int \mathbf{j}_i dl$ , con lo que se llega a la expresión:

$$A \bar{\mathbf{a}} = I \quad \text{Ec. 9.25}$$

Este sistema de ecuaciones una vez resuelto conduce a la solución del problema directo a través del vector de parámetros  $\bar{\mathbf{a}}$ .

En lo que sigue se describirá la implementación del cálculo de los términos de la matriz del sistema y del término independiente  $I$ .

### 9.3.1 Cálculo de la matriz del sistema

<sup>14</sup> Del inglés *stiffness*

Para realizar el cálculo de los términos  $A(i, j) = \iint_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \mathbf{j}_j ds$  se procedió a integrar en cada elemento de la grilla por separado, utilizando la uniformidad de la conductividad en cada elemento:

$$\iint_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \mathbf{j}_j ds = \sum_{e=1}^M \mathbf{s}_e \iint_{\Omega_e} \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \mathbf{j}_j ds \quad \text{Ec. 9.26}$$

Siendo M la cantidad de elementos de la grilla  $\Omega_e$  el dominio de integración correspondiente a cada elemento.

De esta forma, el cálculo de la matriz del sistema se separa en el cálculo de la matriz de integrales cruzadas de las funciones base seguida de una multiplicación por el vector de conductividades. Como se verá más adelante al implementar métodos iterativos de resolución del problema directo, en que se debe resolver el problema directo en cada iteración, la separación mencionada tiene la ventaja de que el cálculo de la matriz de integrales de las funciones base puede realizarse fuera de línea y guardarse, mejorando el tiempo de resolución.

El cálculo de estas integrales se reduce grandemente al considerar que solo serán no nulos aquellos términos que involucren a nodos idénticos o adyacentes. Para pares de nodos más distantes los soportes de las funciones base correspondientes no se solapan y la integración da cero. Con las estructuras de grilla utilizadas fue posible discriminar esta situación para cada par de nodos y así detenerse solamente en los necesarios, lo que redujo notablemente el tiempo de cálculo.

Los valores  $\nabla \mathbf{j}_i$  en cada elemento se calcularon fácilmente mediante interpolación por tres puntos y posterior diferenciación simbólica, aprovechando la linealidad a trozos de las funciones base utilizadas. Se arribó a una fórmula directa en función de las coordenadas de los tres nodos involucrados.

### 9.3.2 Cálculo del término independiente I

Debe considerarse que los términos de este vector solo serán no nulos para los índices correspondientes a nodos que pertenezcan a los electrodos. Para nodos fuera de los electrodos, el soporte de la función base asociada y el dominio de integración no se solapan, siendo nulo el término correspondiente en el vector I.

De esa forma:

$$I(i) = \begin{cases} \frac{I_l}{e_l} \int_{e_l} \mathbf{j}_i dl & \text{si } \text{nodo } i \in e_l \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{Ec. 9.27}$$

Con las estructuras usadas se pudo discriminar entre estos dos casos, limitando el cálculo de la integral solo a los nodos en que el resultado fuera no nulo, evitando cálculos innecesarios.

### 9.3.3 Elección del potencial de referencia

Previamente a la resolución fue necesario reducir en uno la dimensión del sistema, debido a que es necesario definir un potencial de referencia. Se tomo el nodo central de la grilla como el punto de potencial cero. Eliminando la fila correspondiente y el término en el vector  $\bar{a}$  el sistema se lleva dimensiones  $(N-1) \times (N-1)$

### 9.3.4 Resolución de $A\bar{a} = I$

Finalmente, para la resolución del sistema de ecuaciones se utilizó la función nativa de Matlab, ya que la misma es eficiente y el sistema no presenta problemas de mal condicionamiento que hagan necesario escoger otros algoritmos. También se utilizó la descomposición de Cholesky para disminuir el tiempo de cálculo como lo sugieren [3 y 9] pero dado lo pequeño del sistema no mejora en forma significativa el tiempo de cálculo. En la figura 51 se muestra la distribución de potencial obtenida al resolver dicha ecuación para la primera inyección de corriente en un medio homogéneo.

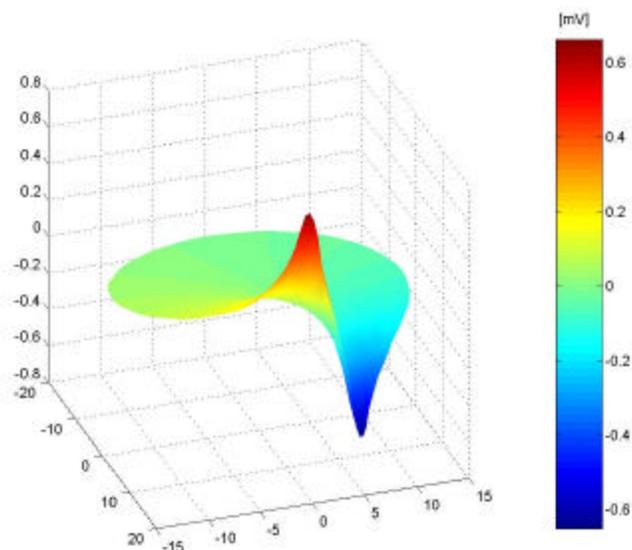


Figura 51 Distribución de potenciales para una inyección de corriente en un medio homogéneo obtenida resolviendo la ecuación 25

### 9.3.5 Resolución del problema inverso

El método de Newton Raphson es el más popular de los métodos iterativos para la resolución del problema de la reconstrucción en EIT, con matrices de peso o de regularización este método ha demostrado su utilidad [18, 19, 2, 9 y 20]. En el capítulo 4.3 se describe el marco teórico que sustenta al método llegando a una ecuación para la conductividad. El algoritmo de Newton Raphson consta de los siguientes pasos:

1. Obtener una aproximación inicial para la distribución de resistividades  $\rho^k$
2. Actualizar el vector de resistividades  $\rho^{k+1}$
3. Actualizar la matriz del sistema
4. Actualizar el Jacobiano
5. Obtener la siguiente aproximación para las resistividades

Donde:

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \left\{ [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] \right\}^{-1} [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h(\mathbf{r}^k) - V_0] \quad \text{Ec. 9.28}$$

Siendo  $h'$  el Jacobiano del sistema.

#### 9.4 Cálculo del Jacobiano

El Jacobiano se puede expresar de la siguiente manera:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1^1}{\partial \mathbf{r}_1} & \dots & \frac{\partial h_1^1}{\partial \mathbf{r}_N} \\ \frac{\partial h_2^1}{\partial \mathbf{r}_1} & \dots & \frac{\partial h_2^1}{\partial \mathbf{r}_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1^K}{\partial \mathbf{r}_1} & \dots & \frac{\partial h_1^K}{\partial \mathbf{r}_N} \\ \frac{\partial h_2^K}{\partial \mathbf{r}_1} & \dots & \frac{\partial h_2^K}{\partial \mathbf{r}_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_L^K}{\partial \mathbf{r}_1} & \dots & \frac{\partial h_L^K}{\partial \mathbf{r}_N} \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 9.29}$$

Donde el supraíndice refiere a la posición del par de electrodos de corriente y el subíndice a la posición del par de electrodos de medida. De esa manera se obtienen perturbaciones de cada medida respecto al vector de resistividades, describiendo los cambios en los voltajes medidos en los electrodos debido a pequeños cambios en la resistividad de los elementos.

Una posible forma de calcular los elementos de  $J$  es perturbar las resistividades de sus elementos una a la vez y calcular el cambio correspondiente en el voltaje de cada electrodo. Esto debe ser hecho para cada uno de los patrones de los patrones de inyección de corriente. Sin embargo, esto bastante en tiempo de cálculo dado que el problema directo debe ser resuelto para cada perturbación en la resistividad.

Existen dos métodos alternativos para calcular el Jacobiano, el primero es el denominado método *estándar* y el segundo es el llamado *método de la sensibilidad* o *método del teorema de compensación*.

### 9.4.1 Método estándar

A partir de la ecuación que se obtuvo en la discretización en elementos finitos  $A\bar{\mathbf{a}} = I$  á, la enésima columna del Jacobiano puede ser obtenida como:

$$\frac{\partial b}{\partial \mathbf{r}_n} = \frac{\partial(A^{-1}f)}{\partial \mathbf{r}_n} \quad \text{Ec. 9.30}$$

El lado derecho de la ecuación anterior se puede expandir como:

$$\frac{\partial(A^{-1}f)}{\partial \mathbf{r}_n} = -A^{-1} \frac{\partial(A)}{\partial \mathbf{r}_n} A^{-1}f = A^{-1} \frac{\partial(A)}{\partial \mathbf{r}_n} b \quad \text{Ec. 9.31}$$

En esta ecuación la derivada  $\partial A / \partial \mathbf{r}_n$  puede ser calculada como:

$$\frac{\partial A(m, i)}{\partial \mathbf{r}_n} = -\frac{1}{\mathbf{r}_n^2} \int_{\Delta_n} \nabla \mathbf{j}_m \cdot \nabla \mathbf{j}_i \quad \text{Ec. 9.32}$$

$\Delta_n$  es el elemento con respecto al que la derivada es calculada. Como la ecuación 9.19 contiene la derivada con respecto a todos los voltajes medidos, la parte que corresponde a los voltajes adyacentes a los electrodos de corriente debe ser extraída.

### 9.4.2 Método de la sensibilidad

Este método está basado en el teorema de Geselowitz (ver Apéndice A) y fue el usado en nuestros programas. Con este método se evita el cálculo de la inversa de la matriz  $A$ .

Partiendo de la expresión de Geselowitz se obtiene que al derivar respecto a ó:

$$\frac{\partial h_l^k}{\partial \mathbf{s}_n} = \int_{\Delta_n} \nabla u_l \cdot \nabla u_k \quad \text{Ec. 9.33}$$

Además se tiene que por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial h_l^k}{\partial \mathbf{r}_n} = \frac{\partial h_l^k}{\partial \mathbf{s}_n} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}_n}{\partial \mathbf{r}_n}$$

Ahora como la relación entre la conductividad y la resistividad es:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\mathbf{r}} \quad \text{Ec. 9.34}$$

Entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{s}_n}{\partial \mathbf{r}_n} = -\frac{1}{\mathbf{r}^2} \quad \text{Ec. 9.35}$$

Por lo que se desprende de las ecuaciones 7 y 9:

$$\frac{\partial h_l^k}{\partial \mathbf{r}_n} = -\frac{1}{\mathbf{r}_n^2} \int_{\Delta_n} \nabla u_l \cdot \nabla u_k \quad \text{Ec. 9.36}$$

Donde  $u_l$  y  $u_k$  son las distribuciones de potencial cuando se inyecta corriente por el par  $k$  y se mide por el par  $l$ .

Recordando la ecuación (9.36):

$$u_l = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i^l \mathbf{j}_i \quad \text{Ec. 9.37}$$

$$u_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i^k \mathbf{j}_i$$

Donde los subíndices  $l$  y  $k$  en  $u$  indica la inyección de corriente por el par  $l$  y  $k$  respectivamente. Sustituyendo esta expresión de potencial en la ecuación 9.10 nos queda:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_n} \nabla u_l \cdot \nabla u_k ds &= \iint_{\Delta_n} \nabla \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i^l \mathbf{j}_i \right) \cdot \nabla \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i^k \mathbf{j}_i \right) ds \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{a}_i^l \mathbf{a}_j^k \iint_{\Delta_n} \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \mathbf{j}_j ds \\ &= (\bar{\mathbf{a}}^l)^T \text{Agrad} \bar{\mathbf{a}}^k \end{aligned} \quad \text{Ec. 9.38}$$

Siendo  $\text{Agrad}(i, j) = \iint_{\Delta_n} \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \mathbf{j}_j ds$ . Esta matriz solo necesita ser evaluada una vez, de

hecho además ya fue utilizada en la resolución del problema directo. La actualización del Jacobiano entonces se realiza mediante la actualización de los vectores  $\bar{\mathbf{a}}$  en cada iteración, que provienen de la resolución del problema directo mediante FEM.

## 9.5 Métodos de Regularización

En el capítulo VII nos referimos al tema para la inversión de la matriz de sensibilidad.

Donde se trató el método de regularización de Tikhonov y el método del L-curve para la elección del parámetro de regularización, con Newton-Raphson también se hará uso de esas herramientas con el agregado de una forma más general pero solo se la estudiará pues como se desarrollará después, tiene sus desventajas frente al primero.

De la fórmula 6.3

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \left\{ [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] \right\}^{-1} [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h(\mathbf{r}^k) - V_0] \quad \text{Ec. 9.39}$$

Donde:

$$\Delta \mathbf{r}^k = \left\{ [h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] \right\}^{-1} [h'(\mathbf{r}^k)]^T [V_0 - h(\mathbf{r}^k)] \quad \text{Ec. 9.40}$$

Para simplificar notación definimos  $J_k = h'_k(\mathbf{r}^k)$  en el paso  $k$ , donde que una vez quitadas las columnas correspondientes a los electrodos de corrientes así como los adyacentes queda

$J \in \mathfrak{R}^{N \times l(l-3)}$  como se mencionó anteriormente  $N$  es el número de elementos de la grilla,  $l$  número de electrodos y  $V$  los voltajes calculados, por lo que la ecuación queda de la forma:

$$\Delta \mathbf{r}^k = (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T (V_0 - V_k) \quad \text{Ec. 9.41}$$

Esta formulación ya es conocida por nosotros, fue vista en el capítulo de Regularización y es la resultante de la formulación en mínimos cuadrados:

$$J_k \Delta \mathbf{r}^k = (V_0 - V_k) \quad \text{Ec. 9.42}$$

Como se puede apreciar esta formula es similar a la fórmula 6.2, dado que  $J$  es una matriz mal condicionada, con un número de condición de  $8.0194 \times 10^{16}$  utilizando el método de Tikhonov para regularizar para este tipo de problemas queda (ver fórmula 6.18):

$$\Delta \mathbf{r}^k = (J_k^T J_k + I^2 I)^{-1} J_k^T (V_0 - V_k) \quad \text{Ec. 9.43}$$

Esta forma de regularizar al método de Newton-Raphson, es también conocida como regularización de Levenberg- Marquardt. En [19 y 2] se sugiere el uso de la matriz identidad para la regularización, utilizando un coeficiente constante de regularización. Mientras que [18] sugiere el uso del operador derivada en las hipótesis de suavidad en la distribución de conductividades, de esta forma se lograría una mejor regularización en la zona homogénea. Para esta forma se debería utilizar la descomposición generalizada en valores singulares de  $(J,L)^{15}$  para la elección del coeficiente de regularización, que como vimos en capítulo 6 se descartó por su complejidad.

Ante la disyuntiva de cual método utilizar se pusieron a prueba ambas formas de regularización. Para el método de Levenberg-Marquardt modificamos el algoritmo recalculando el coeficiente de regularización,  $\lambda$ , después de cada actualización del Jacobiano utilizando el criterio de la curva  $L$ , obteniendo una buena performance en las reconstrucciones, con la desventaja de que se aumenta el tiempo de cálculo. No obstante se hizo uso de este operador derivada para regularizar, teniendo presente que la obtención del coeficiente de regularización estaría a cargo del usuario.

### 9.5.1 Regularización con operador derivada

Comenzaremos un desarrollo de Newton-Raphson más general que el visto en la formula 4.8 agregándole un término de regularización:

$$e(\mathbf{r}) = \|V_0 - h(\mathbf{r})\|_2 + I \|L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\|_2 \quad \text{Ec. 9.44}$$

Minimizando dicho error respecto a la conductividad  $c$  obtenemos:

$$e'(\mathbf{r}) = -[h'(\mathbf{r})]^T [V_0 - h(\mathbf{r})] + I L^T L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \text{Ec. 9.45}$$

Definimos  $L^T L = W$

---

<sup>15</sup> ver formula 6.42, capitulo 6

## IMPETOM I

$$e''(\mathbf{r}) = [h'(\mathbf{r})]^T [h'(\mathbf{r})] - \left[ \sum_{j=1}^M (V_0^j - h_j(\mathbf{r})) h_j''(\mathbf{r}) \right] + \mathbf{I} W \quad \text{Ec. 9.46}$$

Usando la fórmula 4.11:

$$e'(\mathbf{r}) \approx e'(\mathbf{r}^k) + e''(\mathbf{r}^k) \Delta \mathbf{r} \quad \text{Ec. 9.47}$$

Recordando que  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}^k$  y sustituyendo y despreciando el término sumatoria:

$$e'(\mathbf{r}_{k+1}) = -[h'(\mathbf{r}^k)]^T [V_0 - h(\mathbf{r}^k)] + \mathbf{I} W (\mathbf{r}^k - \mathbf{r}_0) + ([h'(\mathbf{r}^k)]^T [h'(\mathbf{r}^k)] + \mathbf{I} W) (\Delta \mathbf{r}^{k+1}) \quad \text{Ec. 9.48}$$

Igualando a cero esta expresión, nos da que  $e$  tiene un mínimo en:

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + ([h'(\mathbf{r}_k)]^T [h'(\mathbf{r}_k)] + \mathbf{I} W)^{-1} [[h'(\mathbf{r}_k)]^T (V_0 - h(\mathbf{r}_k)) - \mathbf{I} W (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0)] \quad \text{Ec. 9.49}$$

Esta fórmula es conocida como método de Gauss-Newton regularizado.

### 9.5.2 Construcción de la matriz L

Como se mencionó anteriormente la elección de esta matriz tiene que ver con el operador derivada. Y se construye de la siguiente manera:

$$L_i = [0, \dots, 0, 3, 0, \dots, -1, \dots, -1, \dots, -1, \dots, 0] \quad \text{Ec. 9.50}$$

Donde el subíndice  $i$  está asociado a un elemento, el término  $i$  de la fila asociada al elemento vale 3 y -1 en los índices asociados a los elementos adyacentes al  $i$ .

Construcción de la matriz L

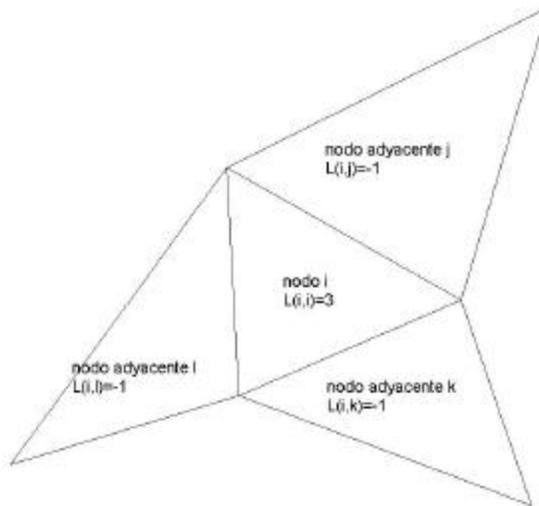


Figura 52 Construcción de la matriz L

Con esa elección para la matriz L, el término  $\|L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\|_2$  representa una aproximación de la variación media de la distribución c. De esa manera se intenta minimizar también dicha variación con lo que aparece acá la hipótesis de suavidad en la conductividad.

### 9.5.3 Utilización del Método de Levenberg- Marquardt (Tikhonov)

De la ecuación 9.43 tenemos:

$$\Delta c^k = (J_k^T J_k + I_k^2 I)^{-1} J_k^T (V_0 - V_k) \quad \text{Ec. 9.51}$$

En la que se introdujo la actualización del parámetro de regularización en cada paso utilizando el criterio de la curva L. Aplicando el teorema de la descomposición en valores singulares al Jacobiano.

$$J_k = U_k \Sigma_k V_k^T \quad \text{Ec. 9.52}$$

Sustituyendo en 9.52

$$\Delta c^k = V_k (\Sigma_k^T \Sigma_k + I_k^2 I)^{-1} \Sigma_k U_k^T (V_0 - V_k) \quad \text{Ec. 9.53}$$

Por lo que la distribución de conductividades en el paso  $k+1$  es:

$$c^{k+1} = c^k + V_k (\Sigma_k^T \Sigma_k + I_k^2 I)^{-1} \Sigma_k U_k^T (V_0 - V_k) \quad \text{Ec. 9.54}$$

Este método a simple vista parece más simple que el de Gauss-Newton pero tiene la ventaja de que la elección del coeficiente es no supervisado.

En lo que sigue se mostrarán algunos resultados utilizando este método:

## 9.6 Reconstrucciones

En las siguientes figuras se muestran distintas reconstrucciones hechas con los dos métodos de regularización empleados, como ya se mencionó, el coeficiente de regularización  $\lambda$  fue elegido en forma automática mediante la curva L para Tikhonov, y en forma manual para la regularización con el operador derivada.

Primeramente se presentamos las reconstrucciones a partir de simulaciones con una sola discontinuidad sobre un fondo homogéneo:

# IMPETOM I

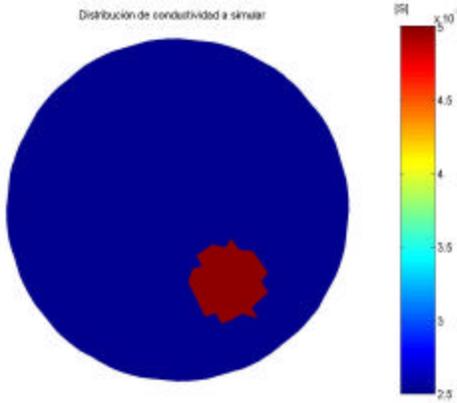


Figura 53 Distribución de conductividades simulada

En las siguientes figuras se comparan los resultados en 2D para las dos técnicas y luego en 3D:

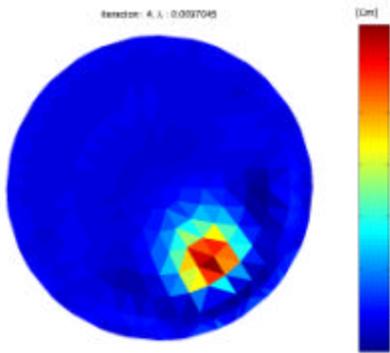


Figura 54 Regularización de Thikonov

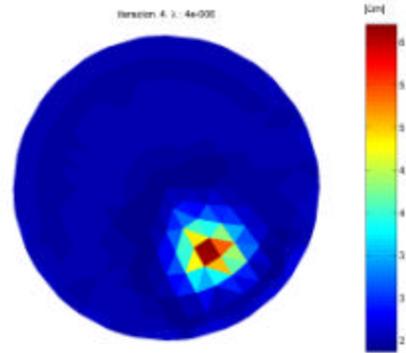


Figura 55 Regularización Operador Derivada

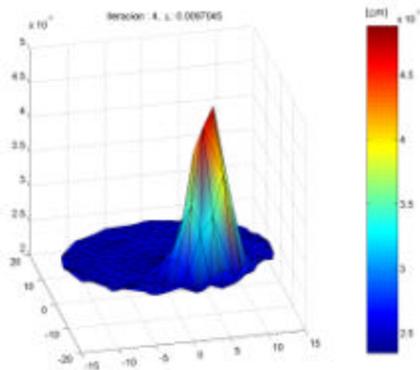


Figura 56 Regularización de Thikonov 3D

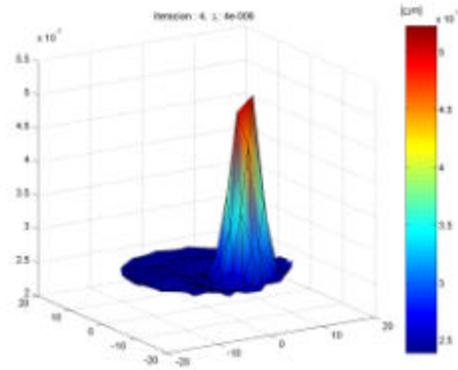


Figura 57 Regularización Derivada 3D

Seguidamente se presentan resultados para dos discontinuidades:

# IMPETOM I

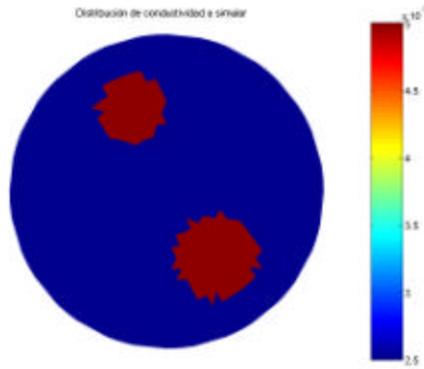


Figura 58 Distribución de conductividades simulada

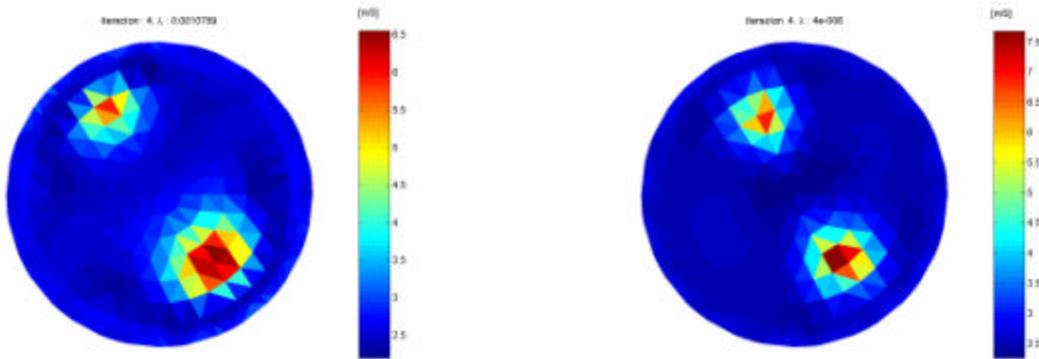


Figura 59 Regularización de Thikonov

Figura 60 Regularización Operador Derivada

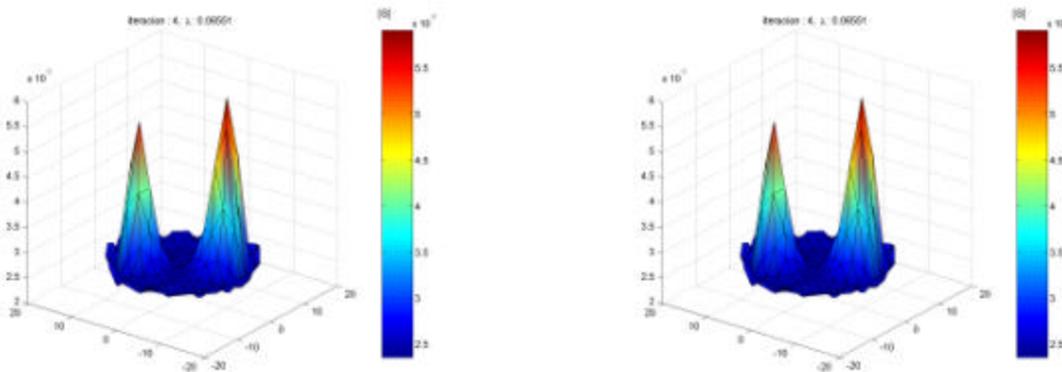


Figura 61 Regularización de Thikonov 3D

Figura 62 Regularización Derivada 3D

Reconstrucciones hechas con ambas formas de regularización con medidas reales sobre un fantomas:

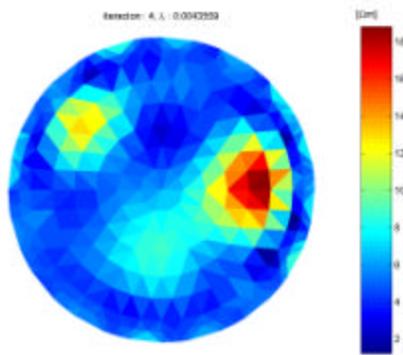


Figura 63 Datos reales regularizados con la curva L

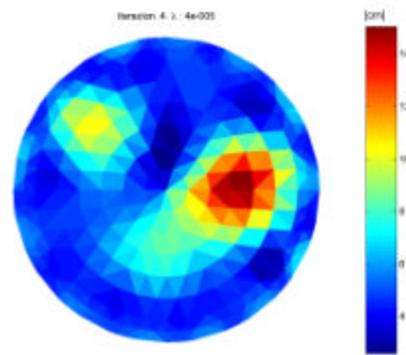


Figura 64 Datos reales regularizados con la matriz R

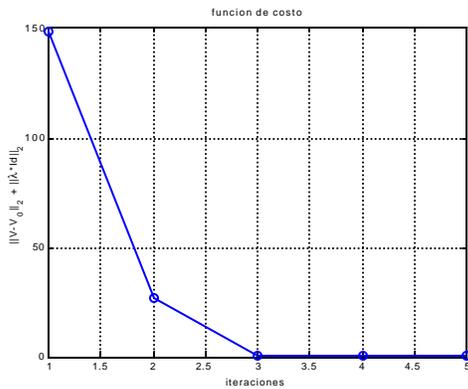


Figura 65 Residuo Tikhonov

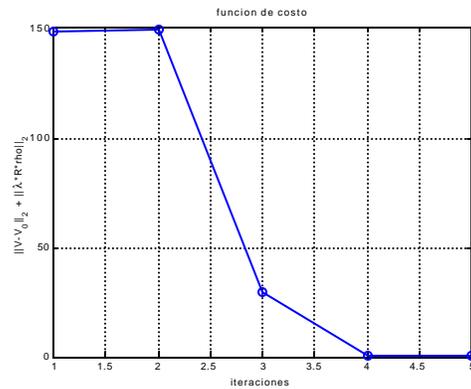


Figura 66 Residuo Operador Derivada

Son notorias las diferencias entre los dos métodos con respecto a los cambios en la función de costo al pasar de la primera a la segunda iteración. En el método de Tikhonov se produce una caída abrupta en el valor de esta función en la segunda iteración, mientras que en el método de la derivada esta caída ocurre en la tercera iteración.

Teniendo en cuenta que la mayor parte de la aproximación a la solución final se produce debido a esas caídas, que ocurren en las primeras iteraciones, muchos estudios aprovechan este hecho y truncan el algoritmo en las primeras iteraciones, bajando así el tiempo de cálculo [NOSER].

Debido a la suposición inicial de conductividad uniforme la primera iteración de estos algoritmos se acerca al concepto de reconstrucción mediante la matriz de sensibilidad.

# 10 Evaluación de los Métodos de Reconstrucción mediante conjuntos de datos estándares

En el presente capítulo nos enfocaremos en la evaluación cuantitativa de los distintos algoritmos de reconstrucción estudiados.

Dado que la EIT tiene un comportamiento no lineal y dependiente de la ubicación espacial, es común encontrar en la bibliografía evaluaciones de los distintos métodos basadas en conjuntos de medidas estándares, debido a que no es posible aplicar los métodos de evaluación usuales a problemas lineales. En nuestro trabajo nos basaremos en un estudio que intenta estandarizar los métodos de evaluación así como los conjuntos de datos empleados en esas evaluaciones [22].

Se evaluaron tres técnicas de reconstrucción; Retroproyección, Matriz de Sensibilidad y Newton Raphson.

## 10.1 Simulación de medidas

Para evaluar los métodos de reconstrucción se utilizaron medidas simuladas y también medidas reales; con estas últimas se realizaron evaluaciones cualitativas.

Para simular medidas se construyeron rutinas en Matlab que nos permitieron seleccionar una distribución de conductividad, para luego calcular las diferencias de potencial medidas entre pares de electrodos de la misma forma que se haría en un sistema real.

La rutina resuelve el problema directo mediante el método de elementos finitos (ver capítulo 9) asumiendo el modelo “gap”.

Se obtuvieron los conjuntos de datos simulados utilizados en las evaluaciones utilizando el Método de Elementos Finitos sobre una grilla de 1968 elementos triangulares con 1049 nodos.

## 10.2 Estudio de linealidad

Para estudiar el comportamiento de la EIT respecto a la linealidad se estudió el comportamiento de los diferentes métodos de reconstrucción frente a una perturbación simple en la distribución de conductividad, para varios valores de amplitud de dicha perturbación.

Se compararon la amplitud del pico de la perturbación en la distribución de conductividad reconstruida frente al valor de la amplitud del pico de la distribución de conductividad original.

Como se mostrará en las figuras siguientes, los valores de pico de conductividad en las reconstrucciones saturan a medida que crece el valor de la conductividad del objeto a reconstruir, coherente con la no linealidad del problema.

El comportamiento global es resultado del proceso total: generación de datos (problema directo) más reconstrucción (problema inverso). Esto se debe a que entre las dos magnitudes que se están comparando ocurren los procesos mencionados y ambos pueden contribuir al comportamiento no lineal del proceso total.

Para poder determinar cuánto de la saturación en las reconstrucciones es causada por cada etapa es necesario analizar la relación entre las perturbaciones en las medidas simuladas de voltaje y las perturbaciones en la conductividad que le dieron origen. Con eso se estaría en condiciones de evaluar el grado de linealidad del problema directo.

### *Estudio de la linealidad en la resolución del problema directo*

A los efectos de evaluar el algoritmo de resolución del problema directo se compararon la amplitud de la perturbación en la conductividad original frente a la perturbación en las medidas de voltajes resultantes entre pares de electrodos adyacentes. Como forma de cuantificar la perturbación en las medidas se eligió la media cuadrática de las diferencias entre las medidas correspondientes a la distribución uniforme y las correspondientes a la distribución con la perturbación. Recordando que se ignoran las medidas en los electrodos adyacentes a los electrodos de inyección de corriente y considerando el teorema de reciprocidad el número de medidas independientes para una configuración de 16 electrodos se reduce a 104.

Las perturbaciones en las medidas se calculan mediante la siguiente ecuación [22]:

$$\Delta_{medidas} = \sqrt{\frac{1}{104} \sum_{i=1}^{104} [g_p^i - g_u^i]^2}$$

donde  $g_u^i$  y  $g_p^i$  son los valores obtenidos (valores de diferencias de voltaje) durante la medida  $i$  para distribuciones de conductividad uniforme y perturbada respectivamente.

En las siguientes figuras se observa el comportamiento de los distintos métodos al reconstruir una única discontinuidad (ver figura 67) cuyo valor de conductividad varía desde  $2 \text{ mS cm}^{-1}$  hasta  $20 \text{ mS cm}^{-1}$  mientras que la conductividad uniforme mantiene su valor en  $2 \text{ mS cm}^{-1}$ . El diámetro de la discontinuidad es del 10% del diámetro total (D) y su centro se

## IMPETOM I

ubicó en el punto medio entre el centro de la zona a reconstruir y la frontera. Esto se detalla en la tabla 3:

ubicación del centro de la discontinuidad	diámetro	conductividad ( $mS\ cm^{-1}$ )	Perturbación en la conductividad ( $mS\ cm^{-1}$ )
$r=0.5R$	0.1D	2	0
$r=0.5R$	0.1D	2.2	0.2
$r=0.5R$	0.1D	2.5	0.5
$r=0.5R$	0.1D	2.7	0.7
$r=0.5R$	0.1D	3	1
$r=0.5R$	0.1D	4	2
$r=0.5R$	0.1D	6	4
$r=0.5R$	0.1D	8	6
$r=0.5R$	0.1D	10	8
$r=0.5R$	0.1D	20	18

Tabla 3 Parámetros de construcción de distribuciones de prueba, para evaluación de la linealidad

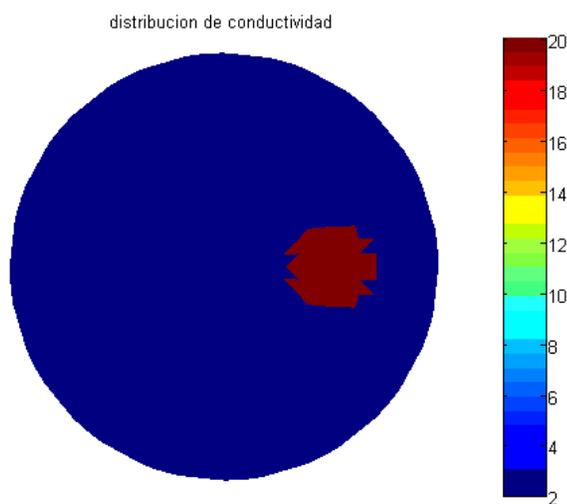


Figura 67 Discontinuidad utilizada para evaluar la linealidad de cada método.

En cada reconstrucción se midió el valor de pico de la perturbación de conductividad de la zona de discontinuidad (línea normal) y el valor de la perturbación en los voltajes generados según ecuación anterior (línea punteada) para las distintas diferencias de conductividad debidas a las distintas perturbaciones. A los efectos de hacer posible la comparación entre esas dos magnitudes se normalizaron ambas respecto a su valor máximo respectivo.

# IMPETOM I

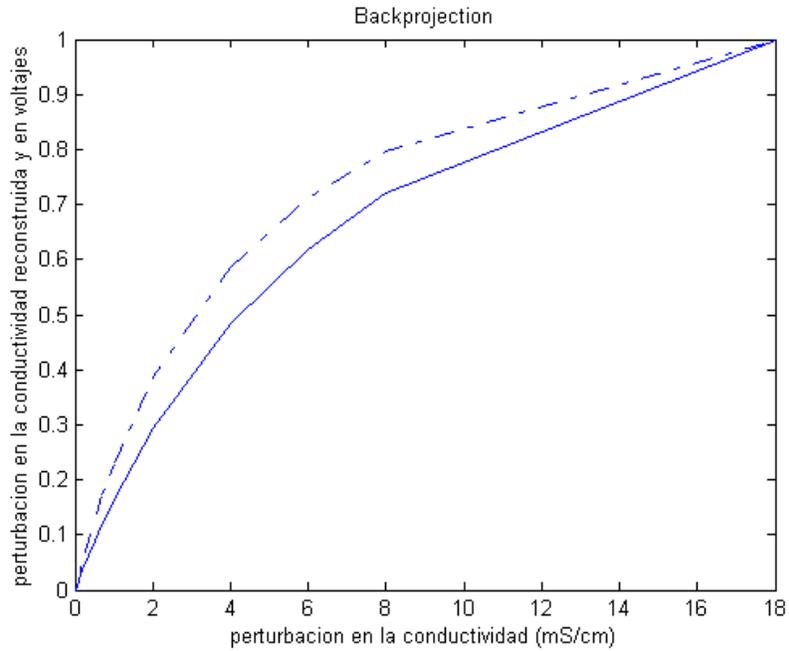


Figura 68 Linealidad del método de Retroproyección, en las abscisas se encuentran las diferencias entre la conductividad homogénea (2 mS/cm) y las perturbaciones de conductividad (Tabla 3)

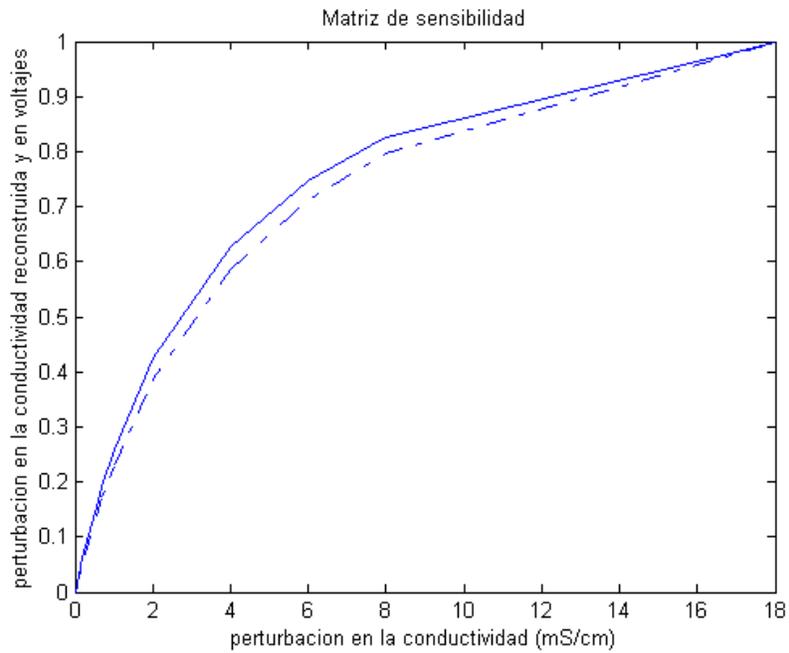


Figura 69 Linealidad del método Matriz de Sensibilidad

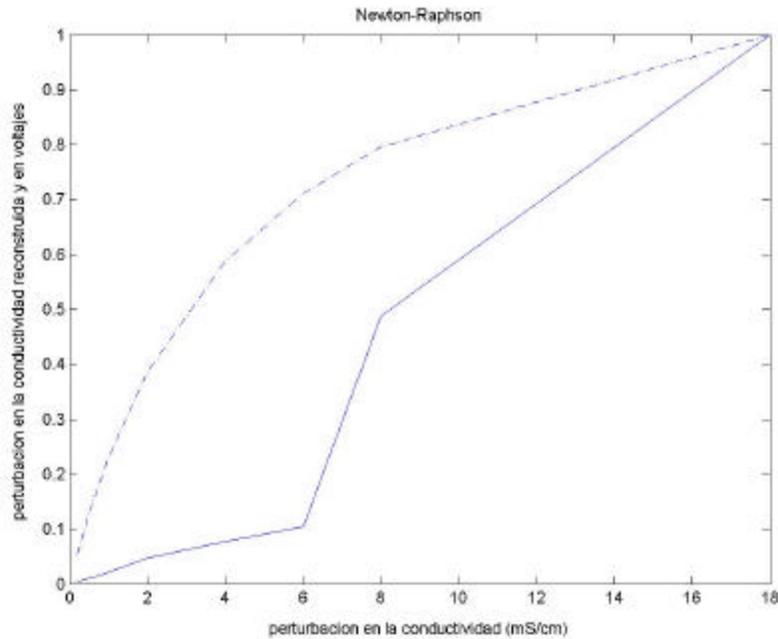


Figura 70 Linealidad del método Newton Raphson

### 10.2.1 Conclusiones

De las figuras 68 y 69 se puede concluir primeramente que el algoritmo de resolución del problema directo implementado presenta un comportamiento no lineal. Dado que se observa que el comportamiento de ambos procesos (generación de datos + reconstrucción) presenta un comportamiento similar concluimos que estos algoritmos de reconstrucción no varían sustancialmente el comportamiento no lineal global.

A partir de la figura 70 se puede observar que luego de cierto nivel de perturbación el comportamiento global se aparta del comportamiento del problema directo. Profundizando más en este algoritmo de reconstrucción se observó que a partir de ese nivel no se lograron resultados aceptables en la imagen reconstruida, debido a que, en esta implementación del algoritmo de Newton Raphson, fue imposible regularizar el problema.

Limitando el rango de estudio al valor de perturbación adecuado se obtienen resultados similares a los obtenidos para los otros métodos. En la figura 71 se muestra ese resultado.

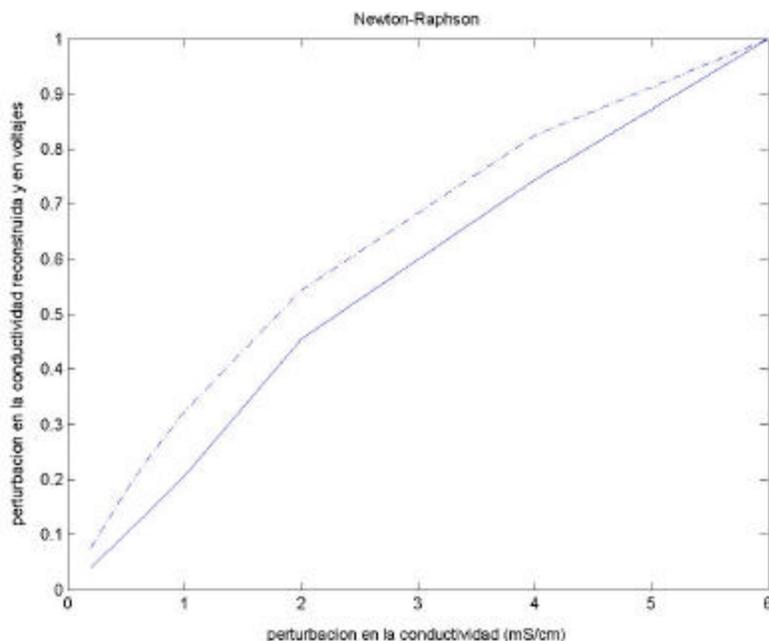


Figura 71 Rango lineal del método Newton Raphson, dentro del rango de 6 mS/cm

Para las evaluaciones siguientes en el caso del método de Newton Raphson se trabajará dentro de este rango.

### 10.3 Estudio de la Resolución

#### *Resolución de la imagen*

En cualquier sistema práctico de reconstrucción de imágenes la imagen obtenida no es idéntica a la deseada. Entre los diferentes tipos de distorsiones posibles a las que se someten las imágenes reconstruidas en esta sección nos enfocamos en la debida a la resolución finita de la imagen.

Existen diversos factores que en la práctica actúan como limitantes de la resolución, que fueron mencionados ya en secciones anteriores. Estudiaremos ahora un marco de trabajo para la evaluación de la capacidad de resolución de sistemas de imágenes en general, que tiene aplicación específica en EIT, aunque con ciertas limitantes.

#### *Point spread function (PSF)*

Consideremos una imagen idealizada consistente de un punto sobre un fondo uniforme. En general la imagen reconstruida a partir de los datos generados por esa imagen idealizada mostrará no un punto simple sino una mancha, es decir que el punto aparecerá difuminado en la imagen. Sin embargo, dado que conocemos la imagen original, el punto es reconocible en la imagen reconstruida.

Agreguemos ahora otro punto a la imagen idealizada. Si los dos puntos están separados lo suficiente, en la imagen reconstruida se observarán todavía dos puntos difuminados distinguibles entre sí. Sin embargo, a medida que acercamos los dos puntos originales se obtendrá una imagen en la que cada vez los dos puntos se harán más indistinguibles entre sí.

En cierto punto, una vez que la separación entre los puntos se haga menor que cierto umbral, la reconstrucción mostrará una única mancha en la que no será posible identificar la presencia de dos puntos distintos. A ese umbral se le denomina límite de resolución del sistema.

Formalmente, la resolución espacial de un sistema de reconstrucción de imágenes es la distancia mínima entre dos objetos puntuales para que sean distinguibles en la imagen reconstruida. Con el objetivo de obtener una definición más cuantitativa introduciremos el concepto de PSF.

Consideremos un sistema de generación de imágenes lineal. Supongamos que un objeto  $I_1(x)$  produce una imagen reconstruida  $IR_1(x)$  y que un objeto  $I_2(x)$  se reconstruye como  $IR_2(x)$ . Si ahora se intenta reconstruir el objeto compuesto  $I_3(x) = aI_1(x) + bI_2(x)$ , con  $a, b$  arbitrarios, el sistema de imágenes será lineal si la imagen resultante es  $IR_3(x) = aIR_1(x) + bIR_2(x)$ .

Para los sistemas de imágenes lineales existe una relación sencilla entre un objeto arbitrario  $I(x)$  y su imagen  $IR(x)$ .

$$IR(x) = I(x) * h(x)$$

donde  $*$  indica producto de convolución en el espacio apropiado. Al núcleo de convolución  $h(x)$  se le denomina PSF dado que  $IR(x) = h(x)$  si  $I(x) = \mathbf{d}(x)$ , siendo  $\mathbf{d}(x)$  la función delta de Dirac. En resumen, para sistemas de reconstrucción lineales, la PSF representa la imagen resultante de la reconstrucción de un objeto puntual ideal.

Queda claro a partir de la definición anterior que la reconstrucción será una representación exacta de la imagen original sólo si la PSF es una función  $h(x) = \mathbf{d}(x)$ . Si  $h(x)$  se desvía de  $\mathbf{d}(x)$ , la imagen resultante será una versión distorsionada de la original; en el caso concreto e ideal de objetos puntuales se obtendrán puntos difuminados, con lo que se llega a una explicación teórica cuantitativa de lo mencionado más arriba respecto a la reconstrucción de este tipo de objetos y su relación con la capacidad de resolución del sistema: ésta depende del apartamiento de la PSF respecto de una función  $\delta$ .

Para profundizar más en este tema, consideremos un ejemplo simple en una dimensión, en el que la PSF no ideal es una función de pulso. En la figura 72 se muestra esta función y el resultado de la reconstrucción de dos objetos puntuales para tres casos diferentes de separación entre ellos.

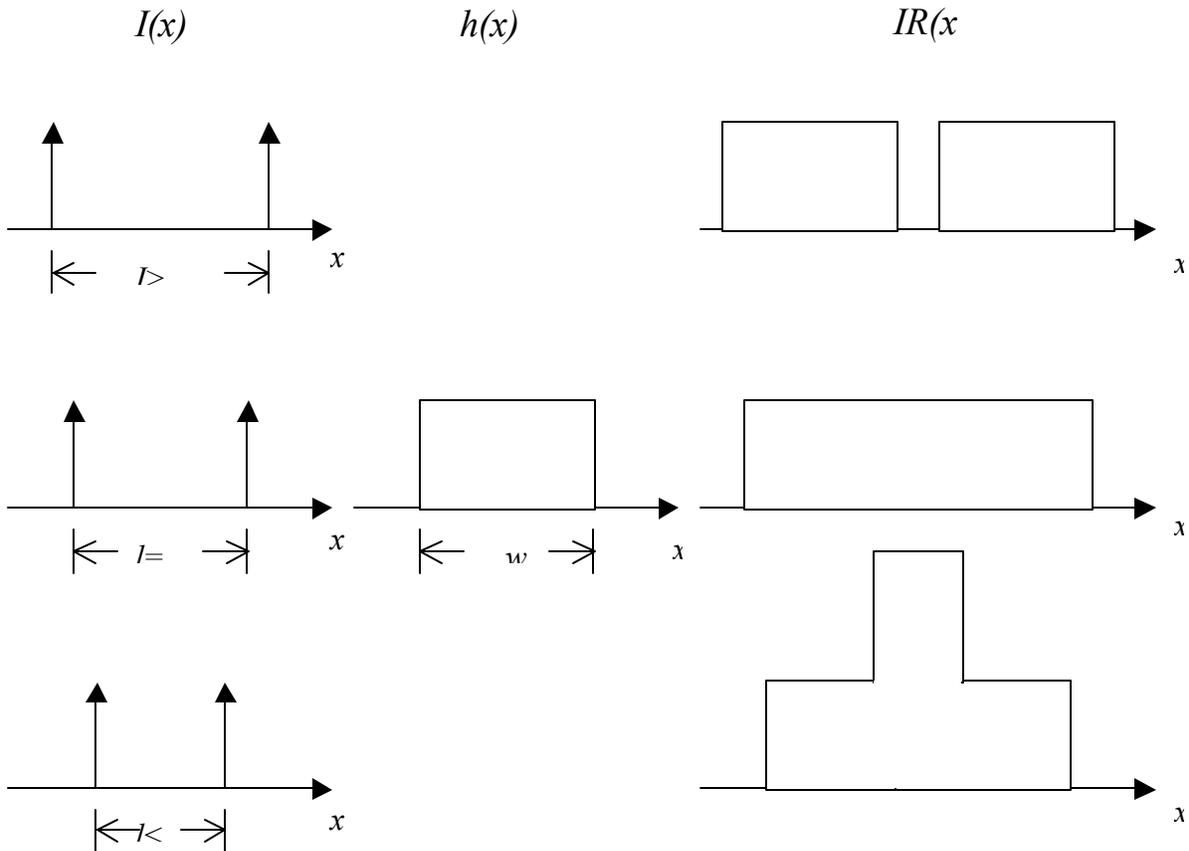


Figura 72 Interpretación de la función de PSF como límite de resolución de un sistema de imágenes lineal

En la columna de la izquierda se muestran los objetos originales, en tres casos diferentes de separación entre ellos  $l$ . En el centro de la figura aparece la función PSF, de ancho  $w$ . Sobre la derecha se muestran los resultados de la reconstrucción, que se obtiene efectuando el producto de convolución entre las funciones mencionadas.

Como se puede apreciar, los dos puntos son distinguibles entre sí en la imagen reconstruida solo cuando la separación entre los mismos es mayor que el ancho de la PSF. A partir de esto se puede decir que el límite de resolución de un sistema de imágenes lineal está relacionado con el ancho de su PSF.

En el caso general, la PSF no será una función de pulso. Se hace necesario entonces una definición convencional para el “ancho” de la misma. Se define entonces un “ancho efectivo”, definición para la que existen dos posibilidades:

- es el ancho tomado a una altura igual a la mitad del máximo del módulo de  $h(x)$  (FWHM, por las siglas en inglés de “full width half maximum”).

## IMPETOM I

- es el ancho de una función de pulso con altura igual a la altura máxima de  $h(x)$  y área igual al área de  $h(x)$ , es decir

$$\text{"ancho efectivo"} = \frac{1}{h_{\text{máx}}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$$

Por simplicidad de implementación en su cálculo, utilizaremos el primer concepto en lugar del segundo.

Los ejemplos y definiciones anteriores se concentraron en problemas unidimensionales. Para casos bidimensionales como el nuestro elegiremos la siguiente extensión del concepto:

- el “ancho efectivo” de la PSF será el área de la sección tomada a la mitad del máximo.

En las pruebas que siguen se tomará como FWHM al cociente entre la cantidad anterior y el área total de la imagen, a los efectos de normalizar los resultados y hacer posible la comparación entre los distintos métodos.

### Evaluación de la dependencia espacial de la (PSF)

Para su estudio se analizó la respuesta de los diferentes métodos a un conjunto de perturbaciones simples en la distribución de conductividad. Se simuló la delta con la mínima unidad de conductividad que podíamos tomar, que es la de un solo elemento. La ubicación de esta delta fue variando desde el centro, zona intermedia, hasta la periferia. Esto se muestra en la figura 72

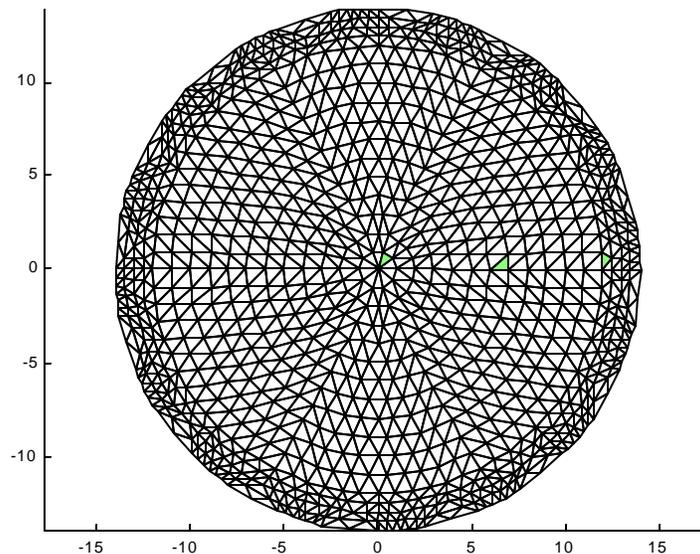


Figura 73 Ubicación de las distintas deltas para la evaluación

Luego se calculó la FWHM para cada reconstrucción en cada método utilizado, tomando este valor como la resolución. En la tabla 4 se muestran los resultados obtenidos:

## IMPETOM I

Método de Reconstrucción	centro	intermedio	Periferia
Matriz de Sensibilidad (MS)	0,379	0,3786	0,075
Retroproyección (R)	0,226	0,095	0,059
Newton Raphson (NR)	0,065	0,057	0,02668

Tabla 4 Resultados de FWHM para los tres métodos

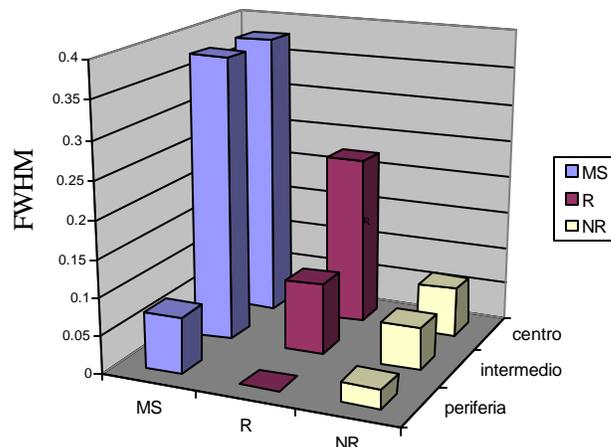


Tabla 5 Representación gráfica de la Tabla 4

### 10.3.1 Conclusiones

Como se puede observar en ambas tablas 4 y 5 para los tres métodos la resolución es menor hacia el centro al aumentar la FWHM. Esto se debe a que se utilizó la configuración adyacente de electrodos para las medidas, que como se mencionó en el capítulo 3 brinda una menor resolución en el centro de la imagen, que por ejemplo la configuración de oposición o polar. Esto significa que dos objetos próximos serán más difíciles de distinguir uno del otro en el centro que en las otras zonas.

En el método de retroproyección se mantiene un aumento continuo de la resolución desde el centro hacia la periferia; sin embargo no se observa el mismo comportamiento en los otros dos métodos. En Matriz de Sensibilidad y Newton Raphson se mantiene constante la resolución esto tal vez debido a que tomamos los algoritmos como un “todo”, es decir, la parte de regularización no supervisada también es incluida en estas pruebas; es probable que el criterio de regularización utilizado arroje un parámetro óptimo que tal vez no sea el óptimo desde el punto de vista de minimizar la FWHM, ya que eligiendo este parámetro en forma supervisada se lograron mejores resultados.

En la periferia es donde se observa una mejor resolución para los tres métodos estudiados. En particular el método de retroproyección es el que muestra mejor resolución en la periferia; sin embargo este resultado debe relativizarse a la luz de las imágenes obtenidas, que presentan artefactos en esa zona, lo que no ocurre con los otros dos métodos.

A continuación se muestran las reconstrucciones (sobre la derecha) así como las distribuciones de conductividad respectivas (sobre la izquierda) hechas para evaluar la PSF.

Resultados para retroproyección

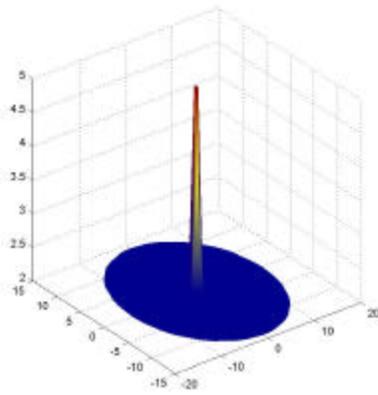


Figura 74 Delta ubicada en el centro

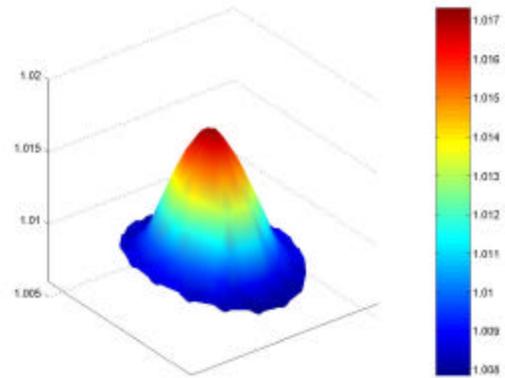


Figura 75 Reconstrucción

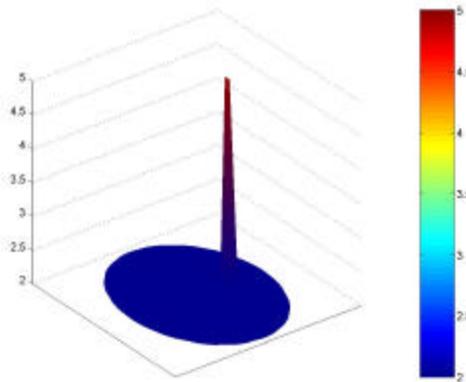


Figura 76 Delta ubicada en zona intermedia

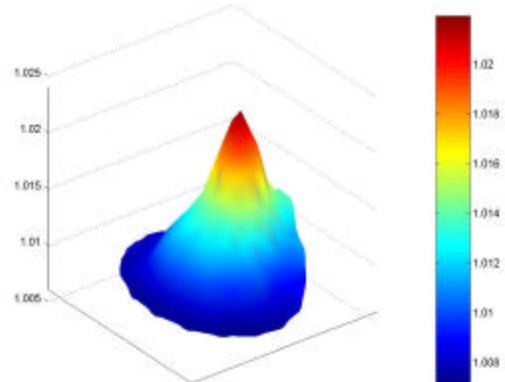


Figura 77 Reconstrucción

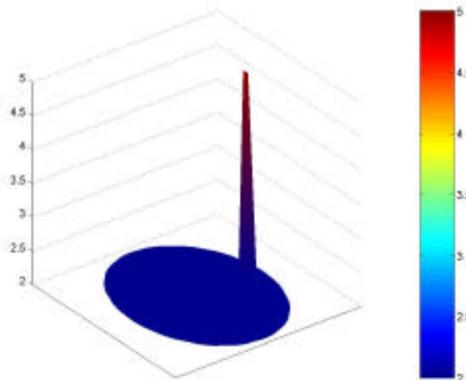


Figura 78 Delta ubicada en zona periférica

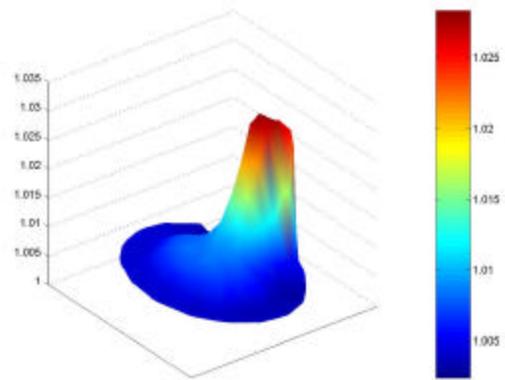


Figura 79 Reconstrucción

Resultados para matriz de sensibilidad:

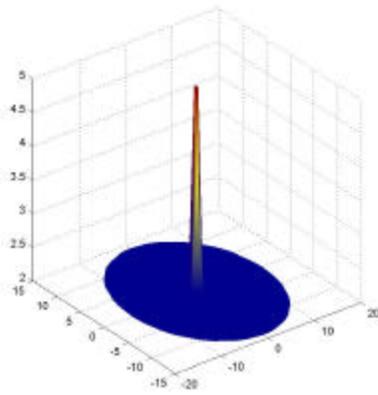


Figura 80 Delta ubicada en el centro

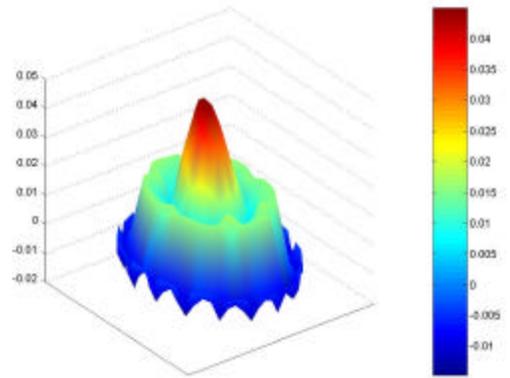


Figura 81 Reconstrucción

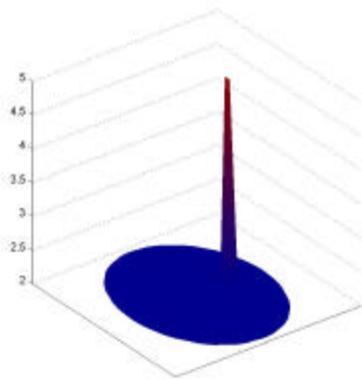


Figura 82 Delta ubicada en zona intermedia

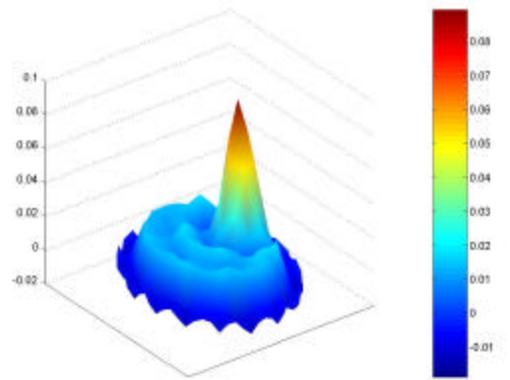


Figura 83 Reconstrucción

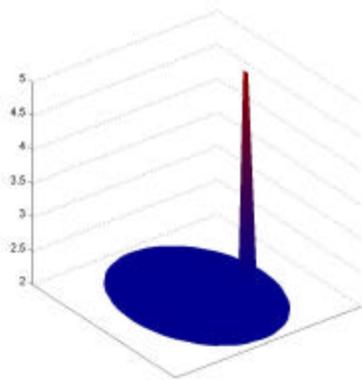


Figura 84 Delta ubicada en zona periférica

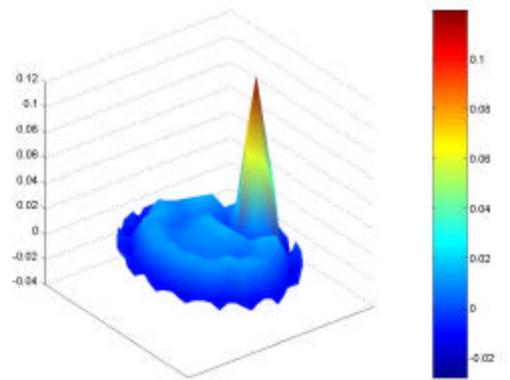


Figura 85 Reconstrucción

Resultados para Newton Raphson:

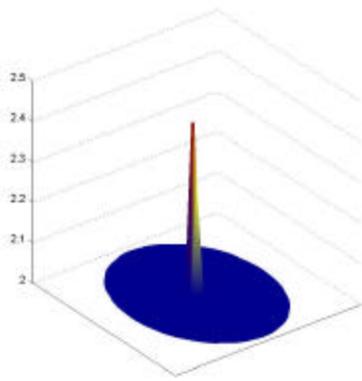


Figura 86 Delta ubicada en el centro

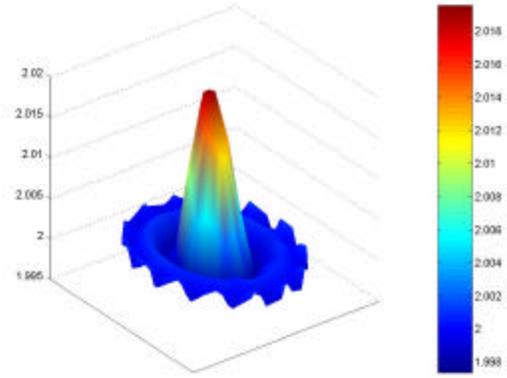


Figura 87 Reconstrucción

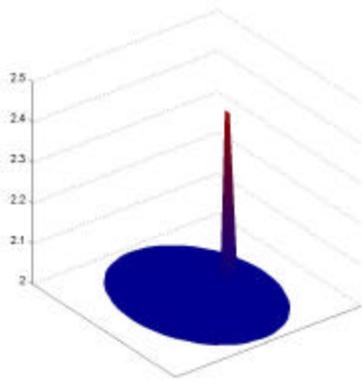


Figura 88 Delta ubicada en zona intermedia

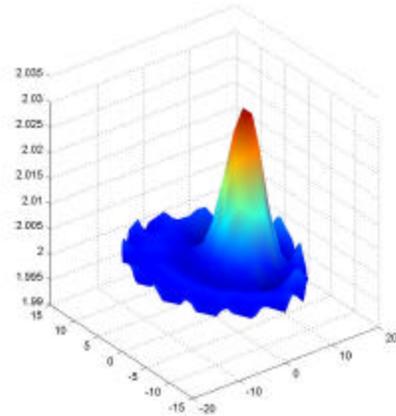


Figura 89 Reconstrucción

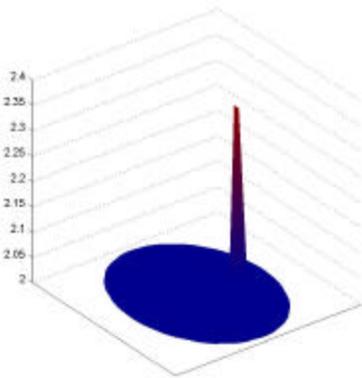


Figura 90 Delta ubicada en zona periférica

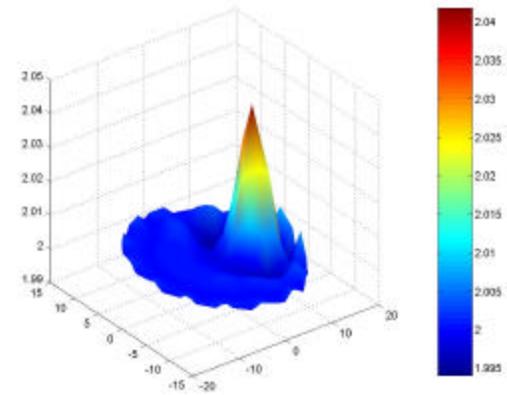


Figura 91 Reconstrucción

#### 10.4 Respuesta a perturbaciones complejas

En la mayoría de los sistemas de reconstrucción de imágenes se utiliza la función PSF para realizar evaluaciones de las distintas técnicas. El concepto de la función PSF es apropiado para sistemas lineales e invariantes en el espacio. Dado que la EIT es no lineal, el estudio de la función PSF por si solo no es suficiente para evaluar el rendimiento de la rutina de reconstrucción [22].

En esta sección y como complemento de la anterior, estudiamos la capacidad de los diferentes algoritmos para distinguir entre objetos cercanos, directamente a partir de distribuciones simuladas de conductividad.

En la tabla 6 se muestran los datos empleados para efectuar la evaluación:

	distancia entre discontinuidades	Diámetro	conductividad ( $s_2mS\ cm^{-1}$ )
Perturbaciones complejas	$l=0.2D$	0.2D C/U	20 ambas
	$l=0.4D$	0.2D C/U	20 ambas
	$l=0.6D$	0.2D C/U	20 ambas

Tabla 6 Conjunto de datos para la evaluación comparativa de los distintos algoritmos

Reconstrucciones complejas utilizando el método de Matriz de Sensibilidad con los parámetros de la Tabla 6:

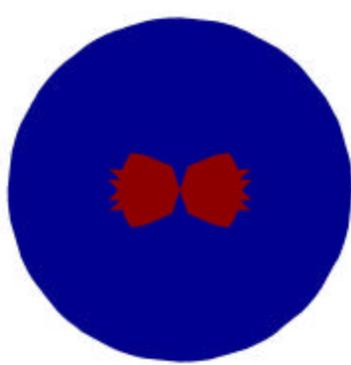


Figura 92 Perturbación compleja

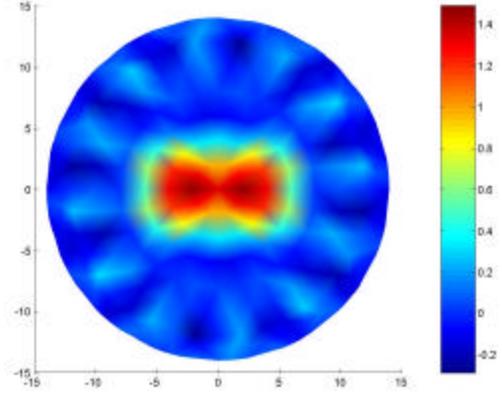


Figura 93 Reconstrucción

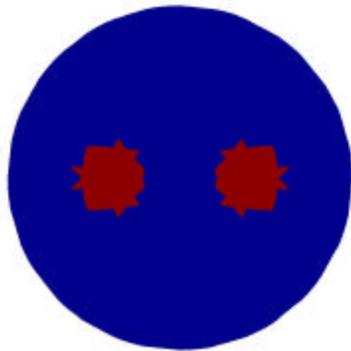


Figura 94 Perturbación compleja

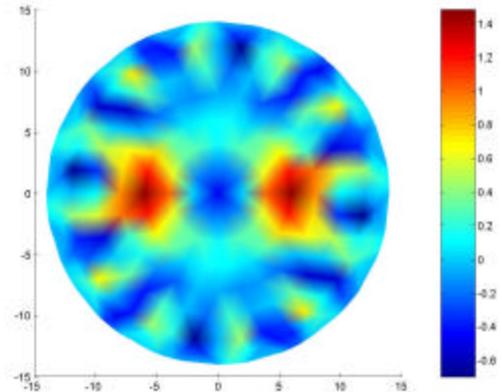


Figura 95 Reconstrucción

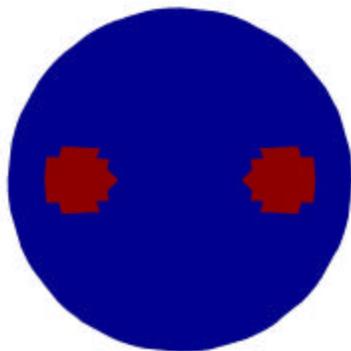


Figura 96 Perturbación compleja

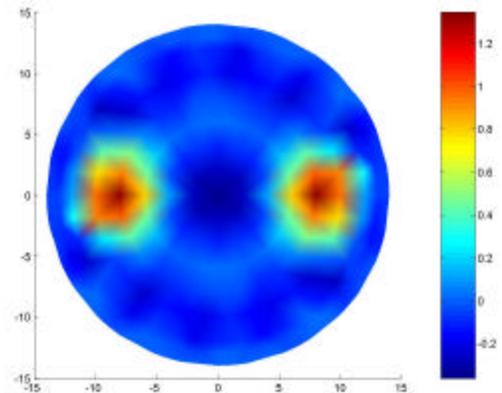


Figura 97 Reconstrucción

Vista 3D de las reconstrucciones complejas utilizando el método de Matriz de Sensibilidad

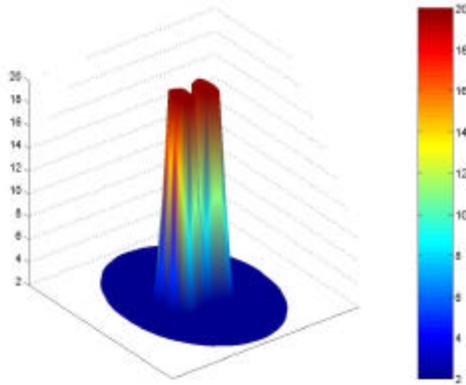


Figura 98 Vista 3D perturbación compleja

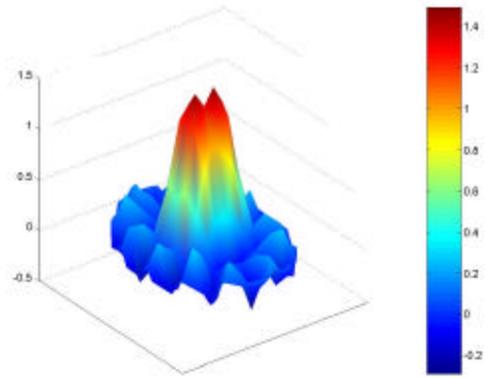


Figura 99 Vista 3D reconstrucción

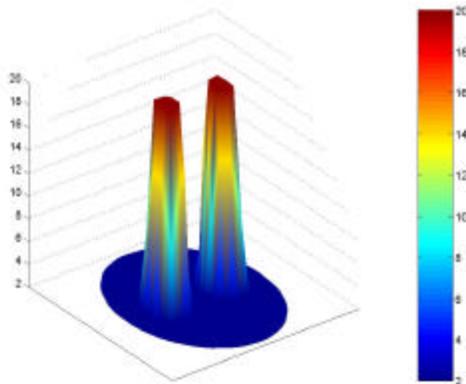


Figura 100 Vista 3D perturbación compleja

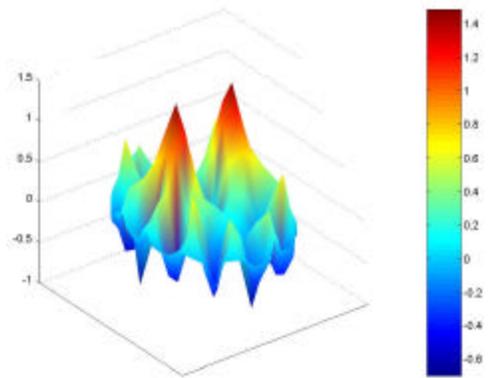


Figura 101 Vista 3D reconstrucción

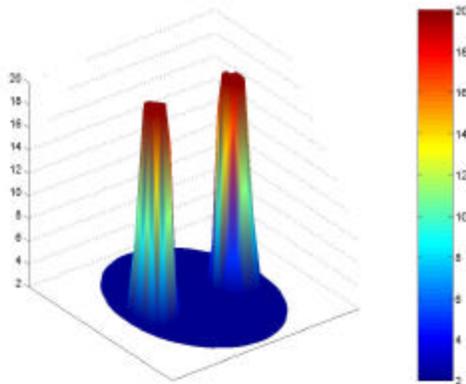


Figura 102 Vista 3D perturbación compleja

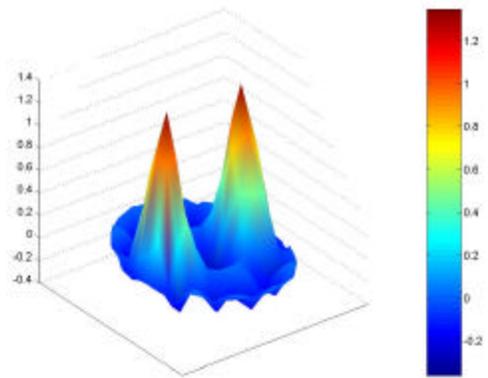


Figura 103 Vista 3D reconstrucción

Reconstrucciones complejas utilizando el método de Retroproyección con los parámetros de la Tabla 6:

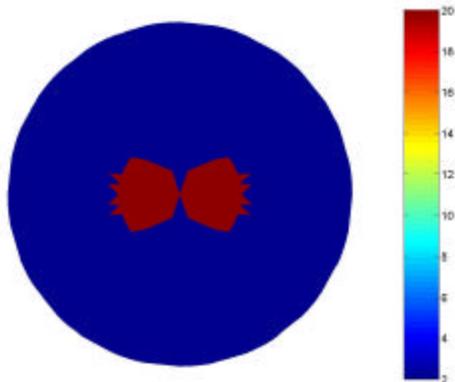


Figura 104 Perturbación compleja

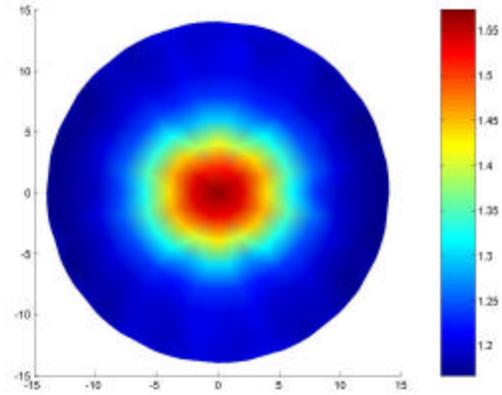


Figura 105 Reconstrucción

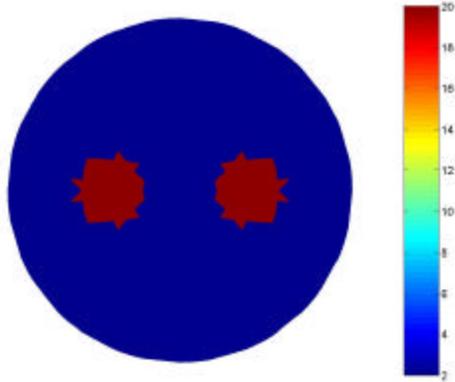


Figura 106 Perturbación compleja

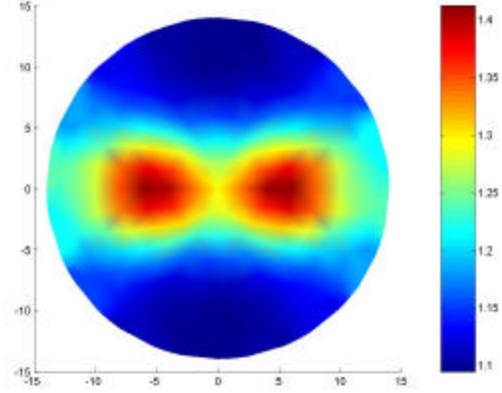


Figura 107 Reconstrucción

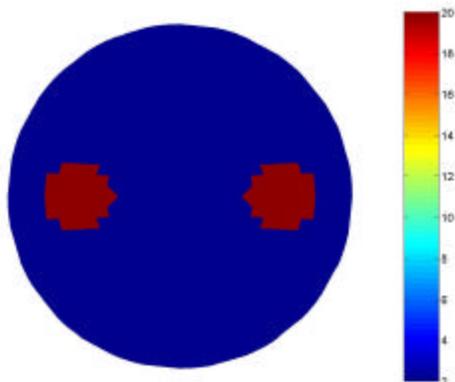


Figura 108 Perturbación compleja

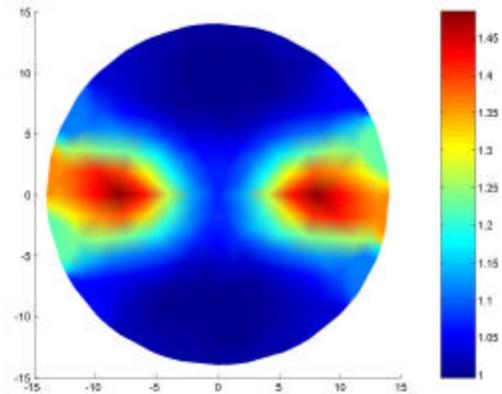


Figura 109 Reconstrucción

Vista 3D de las reconstrucciones complejas utilizando el método de Retroproyección

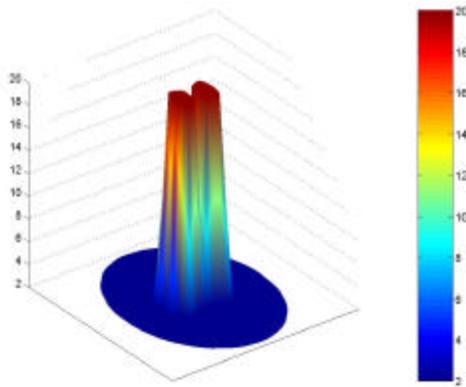


Figura 110 Vista 3D perturbación compleja

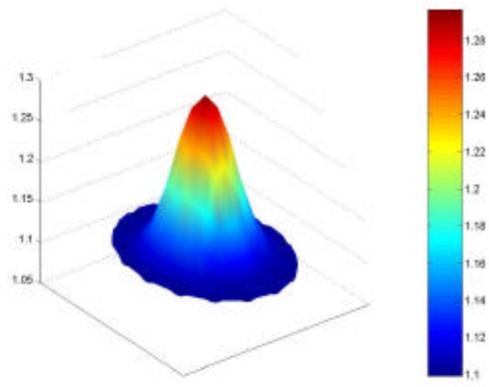


Figura 111 Vista 3D reconstrucción

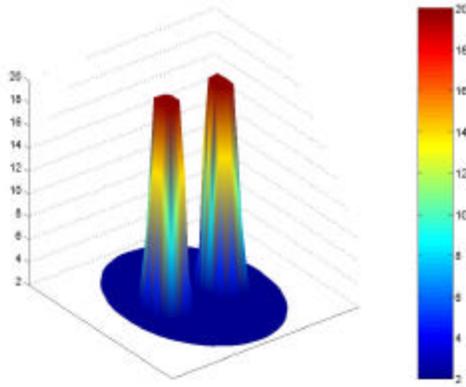


Figura 112 Vista 3D perturbación compleja

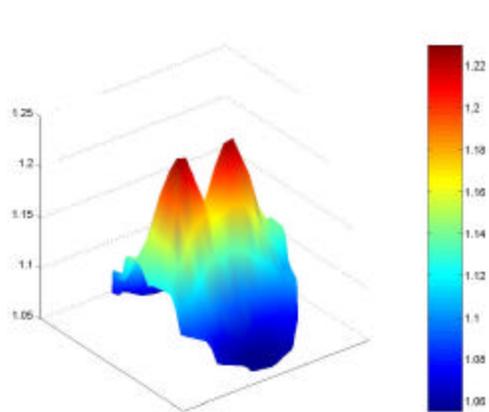


Figura 113 Vista 3D reconstrucción

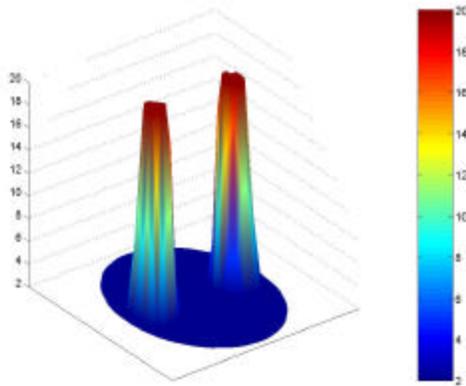


Figura 114 Vista 3D perturbación compleja

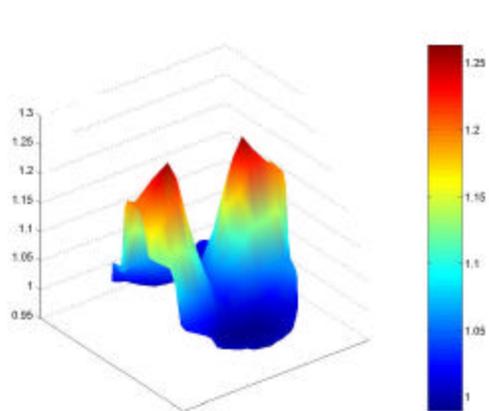


Figura 115 Vista 3D reconstrucción

Reconstrucciones complejas utilizando el método de Newton Raphson con los parámetros de la Tabla 6:

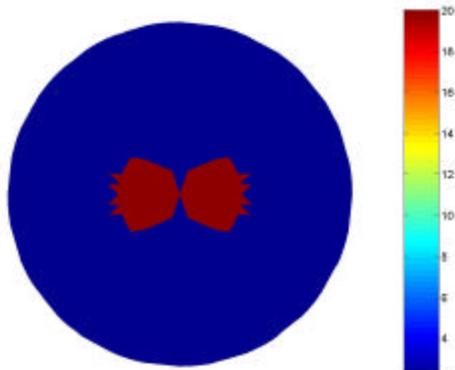


Figura 116 Perturbación compleja

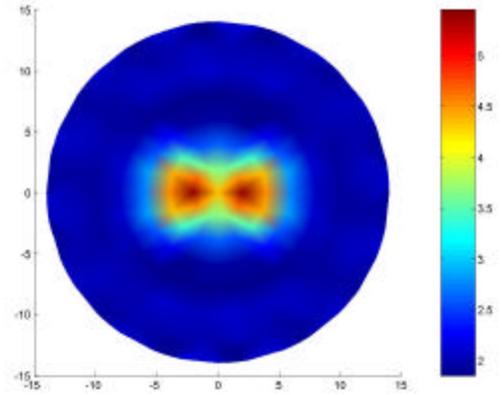


Figura 117 Reconstrucción

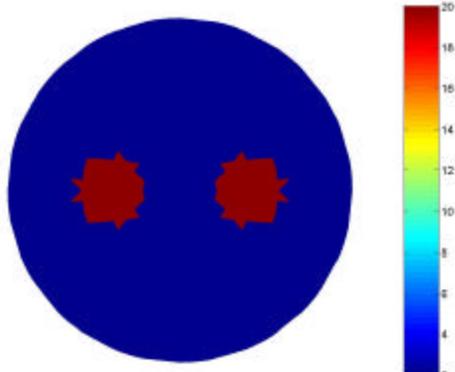


Figura 118 Perturbación compleja

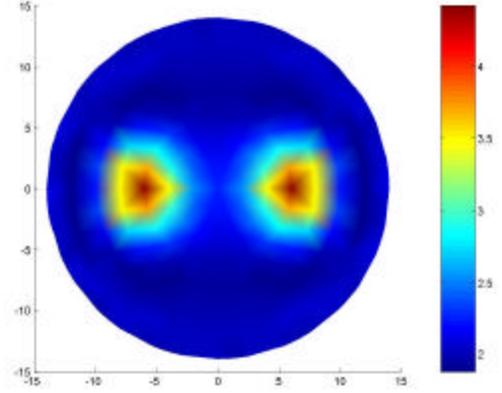


Figura 119 Reconstrucción

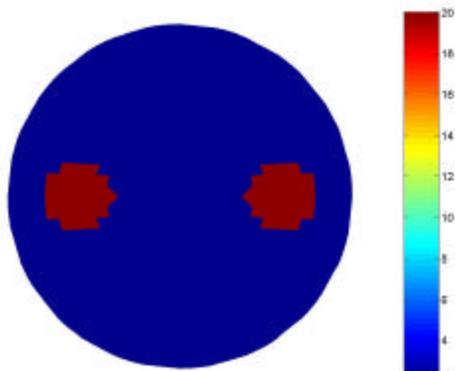


Figura 120 Perturbación compleja

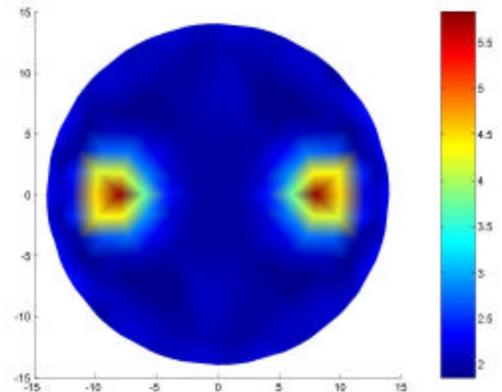


Figura 121 Reconstrucción

Vista 3D de las reconstrucciones complejas utilizando el método de Newton Raphson

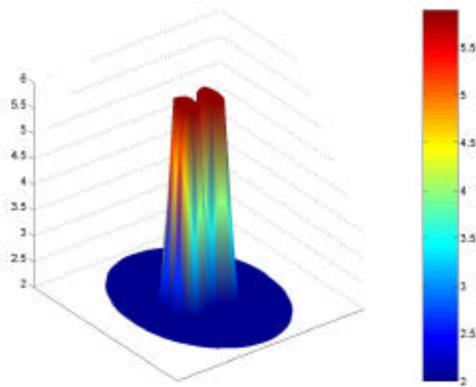


Figura 122 Vista 3D perturbación compleja

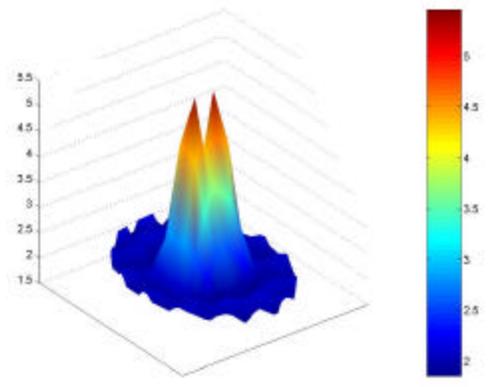


Figura 123 Vista 3D reconstrucción

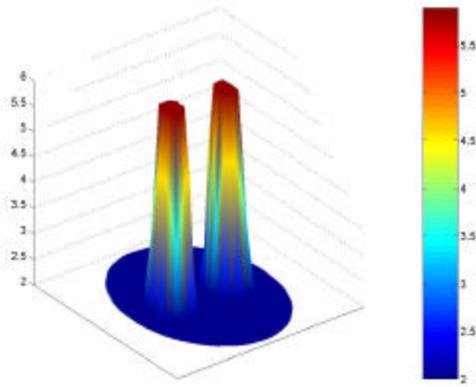


Figura 124 Vista 3D perturbación compleja

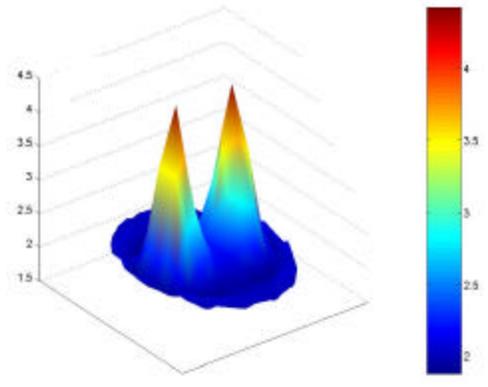


Figura 125 Reconstrucción

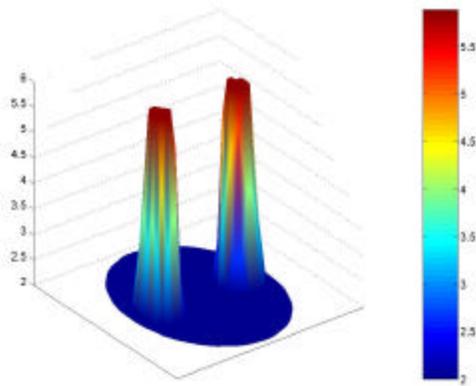


Figura 126 Vista 3D perturbación compleja

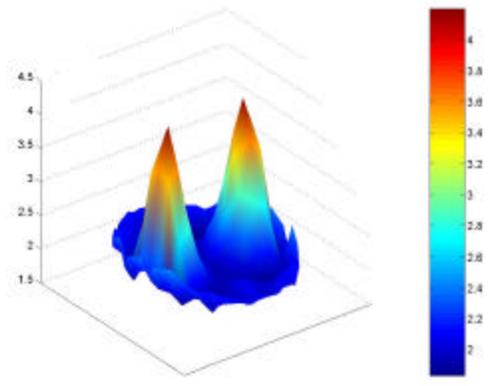


Figura 127 Vista 3D reconstrucción

### 10.4.1 Conclusiones

En las figuras anteriores se muestra las posibilidades de los tres métodos de reconstruir objetos cercanos.

Se encontró que los métodos de Retroproyección y Matriz de Sensibilidad no lograron reconstruir satisfactoriamente dos objetos con un diámetro del 20% del diámetro total ubicados en el centro de la región y espaciados una distancia igual al 20% del diámetro total mientras que el método de Newton Raphson si lo logró.

Esto coincide con la evaluación de la PSF del punto 10.3.1, en donde el método de Newton Raphson mostró los mejores resultados en el centro.

### 10.5 Evaluación de los métodos con conjuntos de datos estándares

Las evaluaciones se realizaron utilizando datos generados a partir de una distribución de conductividad perturbada por una única discontinuidad de diámetro y ubicación variable según la Tabla 7.

ubicación centro de la discontinuidad	diámetro de la discontinuidad	conductividad ( $mS\ cm^{-1}$ ) MS y R	conductividad ( $mS\ cm^{-1}$ ) NR
r=0	0.10D	20	6
r=0.5R	0.10D	20	6
r=0.75R	0.10D	20	6
r=0	0.20D	20	6
r=0.5R	0.20D	20	6
r=0.75R	0.20D	20	6
r=0	0.30D	20	6
r=0.5R	0.30D	20	6
r=0.75R	0.30D	20	6

Tabla 7 Conjunto de datos para la evaluación comparativa de los distintos algoritmos en EIT.

Los valores de conductividad de la tabla anterior fueron extraídos de [22], donde se intenta definir un conjunto de datos estándar para la evaluación de distintos métodos de reconstrucción en EIT. Además en esa publicación se realiza, a modo de ejemplo de utilización de los datos estándares, una evaluación de algoritmos de reconstrucción similares a los implementados por nosotros (retroproyección y matriz de sensibilidad). Relativizando el carácter de “estándares” de estos datos, aún tienen valor para nuestro trabajo pues permiten realizar una comparación cualitativa de nuestras rutinas de reconstrucción con rutinas de terceros.

## IMPETOM I

Los valores ( $6\text{-}20 \text{ mS cm}^{-1}$  en la discontinuidad y  $2 \text{ mS cm}^{-1}$  en la homogénea) están suficientemente diferenciados, como se vio en la figura 68 y 69 el valor de  $20 \text{ mS cm}^{-1}$  es tal que no llega a la saturación en los métodos de retroproyección y Matriz de Sensibilidad. Un valor menor de  $6 \text{ mS cm}^{-1}$  se utilizó en Newton Raphson debido a que este método llega rápidamente a la saturación con valores altos de diferencia de conductividad entre la zona homogénea y la no homogénea ver figuras 70 y 71.

Se calculó el valor de FWHM de la discontinuidad reconstruida para cada caso presentado en la tabla anterior como el cociente del área de la discontinuidad reconstruida sobre el área total de la región expresado como porcentaje.

A continuación se muestran los resultados obtenidos.

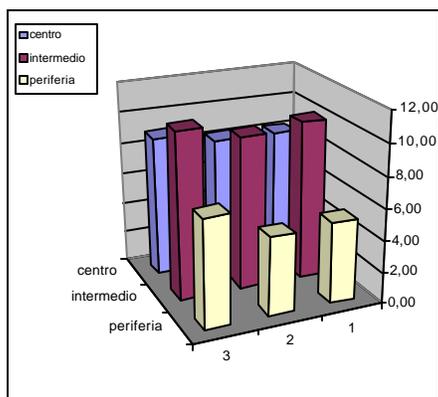


Figura 128 Gráfico del FWHM para los valores descritos en la Tabla 2 utilizando el método de la Retroproyección

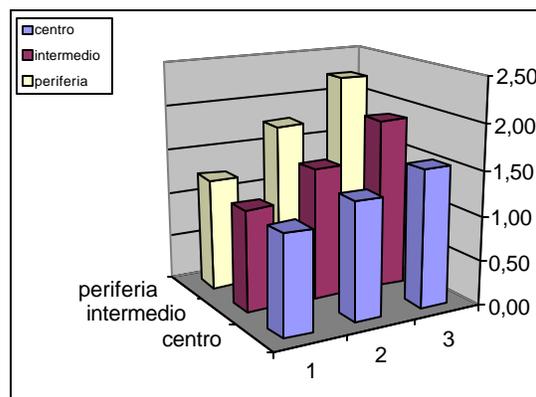


Figura 129 Gráfico del valor pico de la conductividad reconstruida para los valores descritos en la Tabla 2 utilizando el método de la Retroproyección

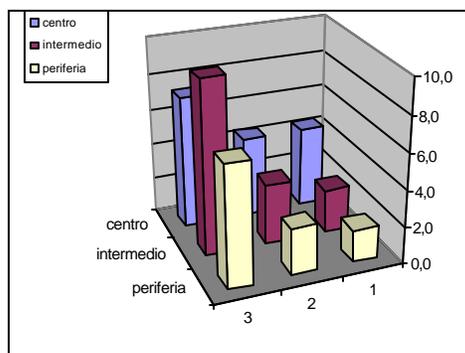


Figura 130 Gráfico del FWHM para los valores descritos en la Tabla 2 utilizando el método de la Matriz de Sensibilidad

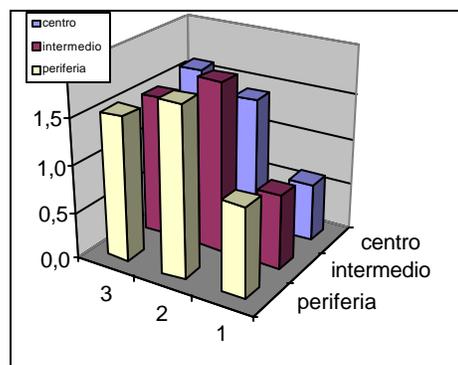


Figura 131 Gráfico del valor pico de la conductividad reconstruida para los valores descritos en la Tabla 2 utilizando el método de la Matriz de Sensibilidad

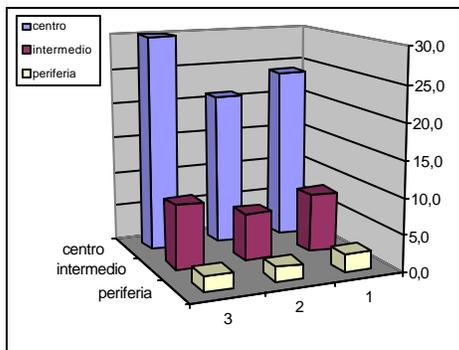


Figura 132 Gráfico del FWHM para los valores descriptos en la Tabla 2 utilizando el método de Newton Raphson

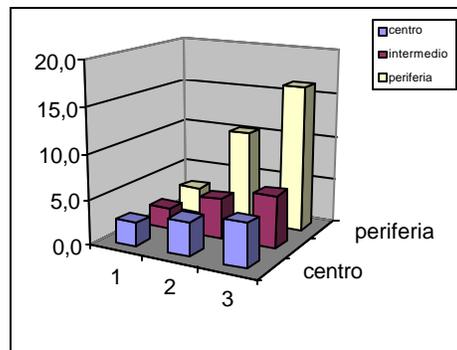


Figura 133 Gráfico del valor pico de la conductividad reconstruida para los valores descriptos en la Tabla 2 utilizando el método de Newton Raphson

El análisis en 2D y en 3D de las reconstrucciones realizadas para este análisis se puede ver en el Apéndice C.

### 10.5.1 Conclusiones

#### Método de Retroproyección

Observando la figura 127 se nota que la FWHM es prácticamente constante independientemente del diámetro de la perturbación, para una misma posición. Este resultado coincide con el mostrado en la publicación de comparación [22] para la rutina de retroproyección.

Con respecto a la variación de la FWHM con la posición de la perturbación, los resultados de [22] muestran una relación directa y monótona de la FWHM para retroproyección. Como se ve en la figura 127, nuestra rutina muestra una caída de la FWHM en el centro de la figura, lo que representaría una ventaja de esta implementación respecto a la nuestra. Una posible explicación de esta discrepancia sería el uso en el trabajo de referencia de un filtrado efectivo, que no fue usado en nuestra rutina de retroproyección. Ese filtrado ecualizaría la performance de la reconstrucción en el centro.

Con respecto a la amplitud del pico de las distribuciones reconstruidas, la coincidencia es completa con los resultados de la publicación de referencia. Dichas amplitudes crecen monótonamente con el diámetro de la perturbación y con la distancia al centro.

Considerando el método de la Matriz de Sensibilidad, la dependencia de la FWHM para una posición dada es directa y monótona con respecto al diámetro de la perturbación. Esto difiere con el método de Retroproyección pero coincide con los resultados del trabajo de referencia (figura 129).

Para un diámetro de la perturbación fijo el valor de la FWHM es creciente con la cercanía de la perturbación al centro de la imagen, lo que no sucede en la publicación de referencia. Esta distorsión con la posición se podría achacar al empleo de técnicas de regularización más fuertes en nuestra rutina que en la de referencia (en esta sólo se usó truncamiento de valores singulares como forma de regularización). Como contrapartida de esta distorsión nuestra rutina presenta una mayor robustez frente al ruido. De hecho es dudosa la

## IMPETOM I

posibilidad de éxito de una rutina de matriz de sensibilidad como la de la referencia en un ambiente de medidas reales y no simuladas, como es el marco de esta comparación, por lo menos en forma no supervisada.

Analizando los valores de pico alcanzados en ambos trabajos, se observan discrepancias similares a las encontradas en la comparación de la FWHM, valiéndose la misma explicación para tales discrepancias que en el párrafo anterior.

Nuestra rutina de Newton-Raphson mostró resultados desalentadores respecto a la evaluación de la FWHM. Esta se mostró prácticamente constante respecto al diámetro de la discontinuidad y dependiente de la posición de la misma. Con respecto a esto último coincide en parte con nuestra rutina de Retroproyección. Estas debilidades pueden achacarse a la implementación de regularización en cada iteración.

La publicación de referencia no implementa este método por lo que no fue posible la comparación con otro trabajo.

A modo de resumen de las comparaciones hechas se puede concluir una performance regular de nuestras rutinas de matriz de sensibilidad y Newton-Raphson debidas a la implementación de técnicas de regularización automáticas que puedan trabajar en forma no supervisada. Con respecto al método de la matriz de sensibilidad el trabajo de referencia muestra una rutina de reconstrucción incapaz de operar en forma no supervisada en un sistema real.

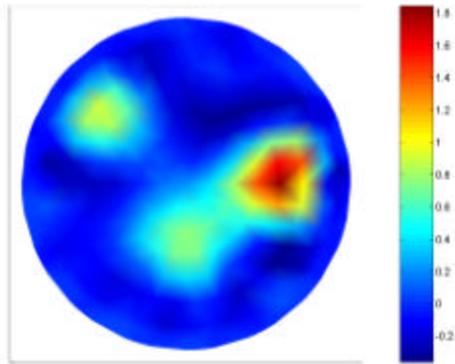
Con respecto al método de retroproyección se explica la peor performance nuestra rutina a la ausencia de filtrado, que se debió a la imposibilidad de obtener material bibliográfico útil sobre el tema.

### 10.6 Reconstrucciones realizadas a partir de medidas reales obtenidas de fantomas

La figura 133 muestra el fantomas utilizado a partir del cual se obtuvieron las medidas reales que utilizamos en el siguiente punto para realizar una evaluación cualitativa de nuestras implementaciones de los tres métodos de reconstrucción.



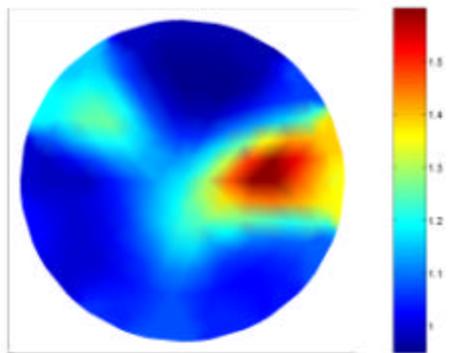
Figura 134 Fantomas utilizado en la Universidad de Kuopio, tomado de <http://www.venda.uku.fi>.



Método de Reconstrucción: Matriz de Sensibilidad.

Archivo de medidas: bubble1.dat

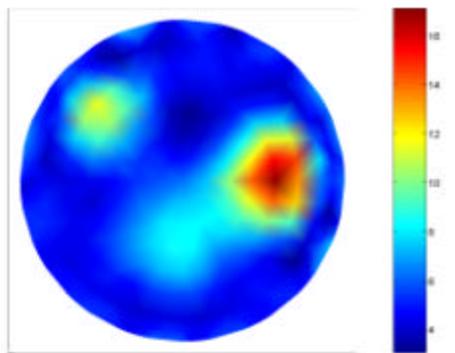
Figura 135 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Retroproyección

Archivo de medidas: bubble1.dat

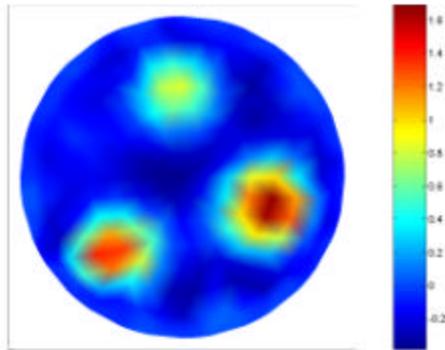
Figura 136 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Newton Raphson.

Archivo de medidas: bubble1.dat

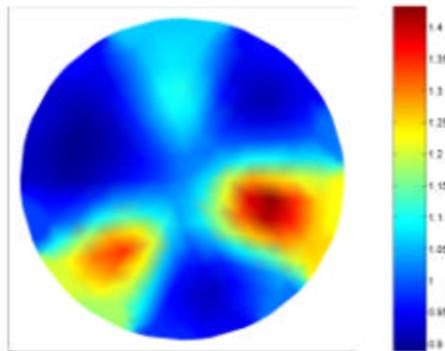
Figura 137 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Matriz de Sensibilidad.

Archivo de medidas: bubble2.dat

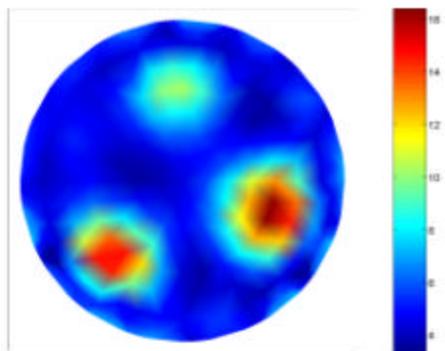
Figura 138 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Retroproyección

Archivo de medidas: bubble2.dat

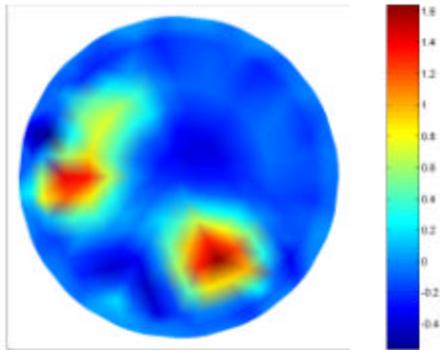
Figura 139 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Newton Raphson.

Archivo de medidas: bubble2.dat

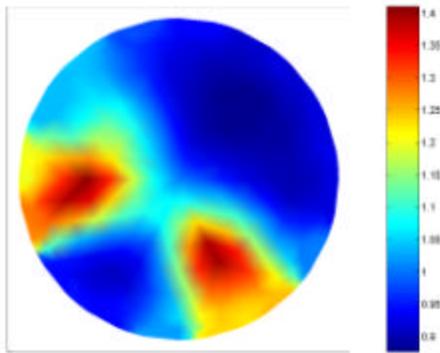
Figura 140 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Matriz de Sensibilidad.

Archivo de medidas: bubble3.dat

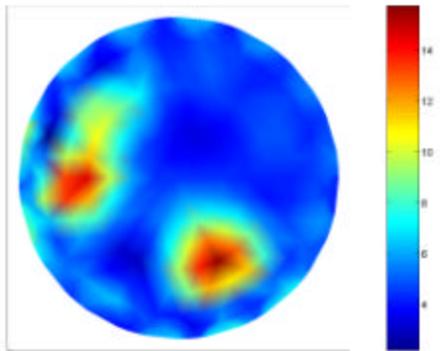
Figura 141 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Retroproyección

Archivo de medidas: bubble3.dat

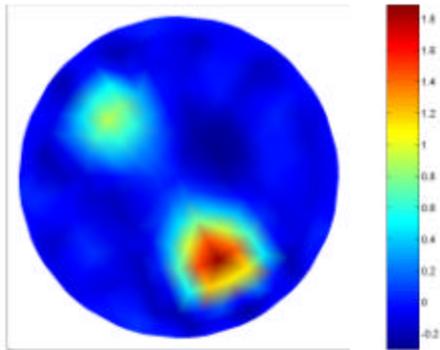
Figura 142 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Newton Raphson.

Archivo de medidas: bubble3.dat

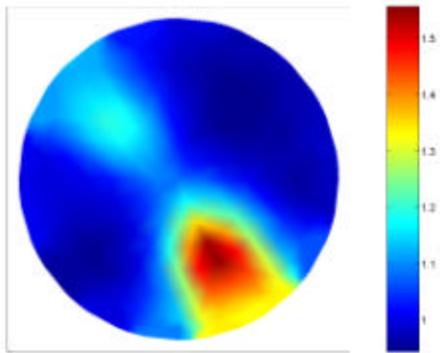
Figura 143 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Matriz de Sensibilidad.

Archivo de medidas: bubble4.dat

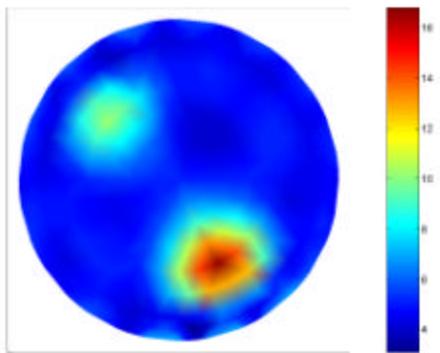
Figura 144 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Retroproyección

Archivo de medidas: bubble4.dat

Figura 145 Reconstrucción de medidas reales



Método de Reconstrucción: Newton Raphson.

Archivo de medidas: bubble4.dat

Figura 146 Reconstrucción de medidas reales

### 10.6.1 Conclusiones

Comparando la regularización implementada con el operador derivada y el de Tikhonov vemos que el primero necesita la intervención del usuario para la elección del coeficiente de regularización, mientras que el segundo provee una forma no supervisada para el cálculo de ese parámetro.

El operador derivada mejora la parte homogénea, como era de esperarse dada la asunción de suavidad que precede a este método; sin embargo las diferencias entre los dos métodos respecto a este punto son apenas perceptibles. Se logra una mejor regularización alrededor de la zona no homogénea con Tikhonov, es decir suaviza más los bordes en dicha zona.

El método de Tikhonov converge más rápidamente, como se vio en el estudio de las funciones de costo.

Se concluye que nuestro método puede ser mejorado mediante la utilización del modelo completo del electrodo que aproxima mejor el comportamiento real, al tener en cuenta la impedancia de contacto entre los electrodos y la piel. Sin embargo, ese modelo asume conocidas dichas impedancias por lo que fue descartado, dada las dificultades para medirlas.

Se hace más difícil controlar la convergencia del método de Tikhonov, a medida que los cambios se hacen menores.

Los métodos iterativos implementados en este capítulo involucran tiempos de cálculo intrínsecamente superiores a los de los dos métodos no iterativos presentados antes. La causa principal de esta diferencia esencial en los volúmenes de cálculo implicados es la necesidad de resolver el problema directo en cada iteración.

El método de Newton-Raphson es no lineal, por lo sería esperable una mejor aproximación a la solución real del problema. No obstante ello no se notó mejoras sustanciales respecto al método de la matriz de sensibilidad, que es lineal. Sin embargo esta aplicación es un tanto relativa debido a las diferentes grillas utilizadas.

# 11 DEMO-IMPETOM I v. 1.0

## 11.1 Introducción

La Demo de IMPETOM I fue diseñada para realizar en forma sencilla y rápida la reconstrucción de imágenes de conductividad y resistividad a partir de medidas hechas por Impetom C. También permite guardar dichas imágenes en un formato estándar como lo es el jpeg con la opción de guardar los datos del pacientes u observaciones en la misma imagen.

Para realizar dicho cometido utiliza los tres algoritmos de reconstrucción estudiados como los son Matriz de Sensibilidad, Newton Raphson y Retroproyección.

## 11.2 Posibilidades de IMPETOMI

IMPETOM I permite leer las medidas guardadas en archivos con extensión \*.txt. Elimina las medidas adyacentes a los electrodos de corriente y las prepara para su procesamiento.

Luego de cargar las medidas IMPETOM I permite elegir cualquiera de los tres métodos mencionados para la reconstrucción de la imagen la cual muestra en distintas figuras en una grilla estándar de 492 elementos. También es posible mejorar la resolución de la imagen para los métodos de Matriz de Sensibilidad y Retroproyección al incorporar una grilla de 1968 elementos para la reconstrucción.

IMPETOM I incluye una herramienta de figura en 3D que muestra en forma más significativa, para todos los métodos, las irregularidades en las zonas homogéneas y no homogéneas permitiendo su rotación para una mejor perspectiva. Esta herramienta también hace un filtrado de la imagen que suaviza las irregularidades de la propia reconstrucción.

## IMPETOM I

IMPETOM I cuenta con la posibilidad de incluir en cada una de las figuras los datos del paciente: Nombre, Apellido, Edad, Sexo y Número de Identificación para una fácil identificación de la imagen para el usuario. Las imágenes producidas se pueden grabar en disco con formato jpeg.

### 11.3 Instalación y requerimientos mínimos

El hardware requerido para un correcto funcionamiento de IMPETOM I es un PC con procesador Pentium II 166 MHz o superior con por lo menos 64 Mbytes de memoria RAM y 16 Gbytes de memoria de disco duro.

IMPETOM I se distribuye en un CD de instalación guiada para Windows 95/98 y NT.

Las imágenes construidas por IMPETOM I podrán ser visualizadas e impresas con programas comunes de visualización de imágenes como los son Microsoft Photo Editor, Acdsee o cualquier otro visualizador de imágenes.

Para instalar IMPETOM I se debe insertar el CD del proyecto y ejecutar el archivo “instalar.exe” que se encuentra en la carpeta IMPETOM I.

### 11.4 Inicio del programa

Una vez instalado IMPETOM I, se creará una carpeta de trabajo llamada *impetomi* en la raíz de la unidad. También se crean los accesos directos para la ejecución del programa en el Escritorio y en el menú de inicio, conjuntamente con el acceso directo del manual de usuario. En la carpeta *impetomi* habrá una carpeta llamada *medidas* que contendrá algunos conjuntos de medidas reales obtenidos en internet.

También se crearán carpetas auxiliares que contendrán bibliotecas y archivos auxiliares para la ejecución del programa.

## 11.5 Ventana de Inicio

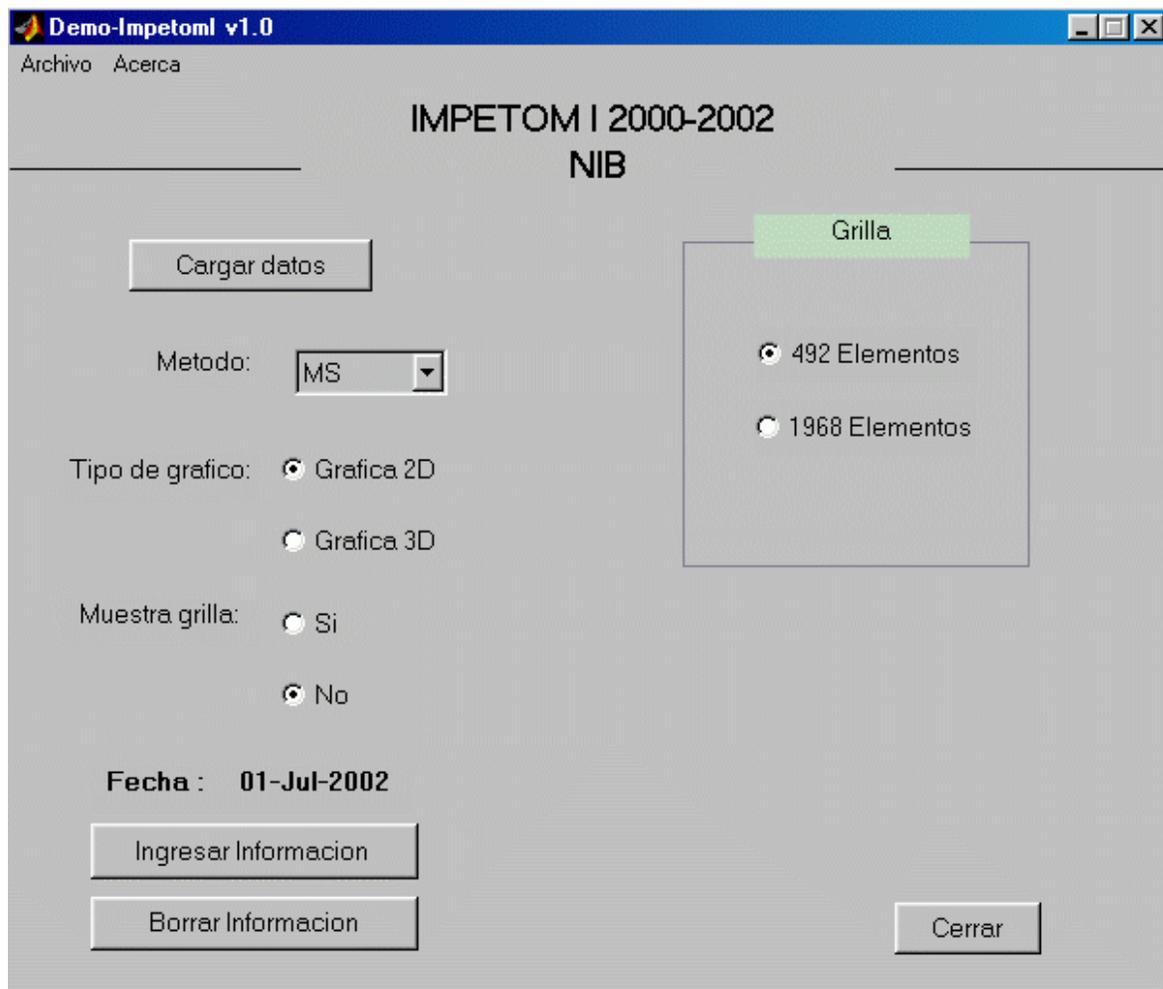


Figura 147 Pantalla inicial de IMPETOMI

Una vez ejecutado el programa aparece la pantalla inicial y con ella los siguientes botones:

**CARGAR DATOS:** lee los datos en el archivo 'medidas.txt', por defecto el programa lo busca en C:\impetomi\medidas\, este camino que se incluye por defecto se lo puede cambiar como se verá más adelante. Al cargar los datos hace que aparezca el botón de reconstruir con letras en rojo como se muestra en la figura 154.

**INGRESAR INFORMACIÓN:** este botón permite ingresar los datos del paciente, conjuntamente con la fecha, en la imagen.

**BORRAR INFORMACIÓN:** elimina los datos que se ingresaron, y no los imprime en la imagen.

## IMPETOM I

**CERRAR:** este botón cierra la aplicación, pero antes aparece el siguiente dialogo para verificar que el usuario esté seguro de cerrar el programa, de la misma manera este diálogo aparece si el usuario intenta cerrar la aplicación a través del icono de cierre de programa del sistema.



Figura 148 Dialogo de confirmación cerrar IMPETOMI

## 11.6 Ventana de ingreso de datos del paciente

The screenshot shows a window titled 'Impetom I' with a subtitle 'Ficha del paciente'. The form contains the following data:

Nombre :	Francisco
Apellido :	Casal
C.I.:	2.185.133-9
Edad :	47
Sexo :	M

At the bottom of the window, there are two buttons: 'Cancelar' and 'Ingresar >>'.

Figura 149 Ventana de ingreso de datos del paciente

IMPETOMI incluye la opción de poder ingresar los datos del paciente en la imagen reconstruida, se aclara que no es necesario ingresar los datos del paciente para lograr una reconstrucción. La ficha del paciente incluye los siguientes campos:

**NOMBRE:** campo en el que escribe el nombre del paciente.

**APELLIDO:** campo en el que escribe el apellido del paciente.

**C.I.:** campo en el que se escribe el número de cédula u otro número que identifica al paciente.

**EDAD:** edad del paciente.

**SEXO:** sexo del paciente

Luego de haber llenados estos campos el usuario debe apretar el botón Ingresar>> para que estos datos se muestren en las imágenes.

## 11.7 Lectura de medidas

Para realizar la lectura de los datos, IMPETOMI implementa dos formas para realizar dicha lectura. Una forma automática, que lee el archivo llamado 'medidas.txt' en el directorio

## IMPETOM I

'C:\Impetomi\medidas\' esto realiza con el botón CARGAR DATOS en la ventana de inicio. Este camino puede ser cambiado por otro a elección del usuario, para ello el usuario debe ir a ARCHIVO como se muestra en la figura 150.



Figura 150 Ventana de cambio de camino para las medidas

Con lo que aparecerá la ventana de cambio de directorio para las medidas,

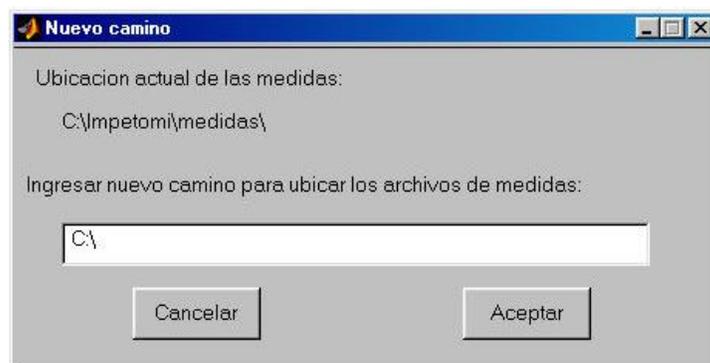


Figura 151 Ventana de cambio de directorio

Una vez ingresado el nuevo camino el programa siempre irá a buscar al archivo 'medidas.txt' al nuevo camino, inclusive después que se lo reinicie. Siempre que se elija CAMBIAR RUTA en 'Archivo' como lo muestra la figura 151, aparecerá en el diálogo de NUEVO CAMINO 'C:\Impetomi\medidas\' de esta forma no se pierde el directorio por defecto en el paquete.

La otra forma mencionada de leer los datos es ingresar al menú ARCHIVO e ir a la primera opción que la de LEER DATOS. En la que el usuario busca a través de explorador del sistema los archivos de medidas como se muestra en las figuras 152 y 153:



Figura 152 Dialogo de lectura de datos

## IMPETOM I

Una vez elegida esta opción aparece la siguiente ventana:

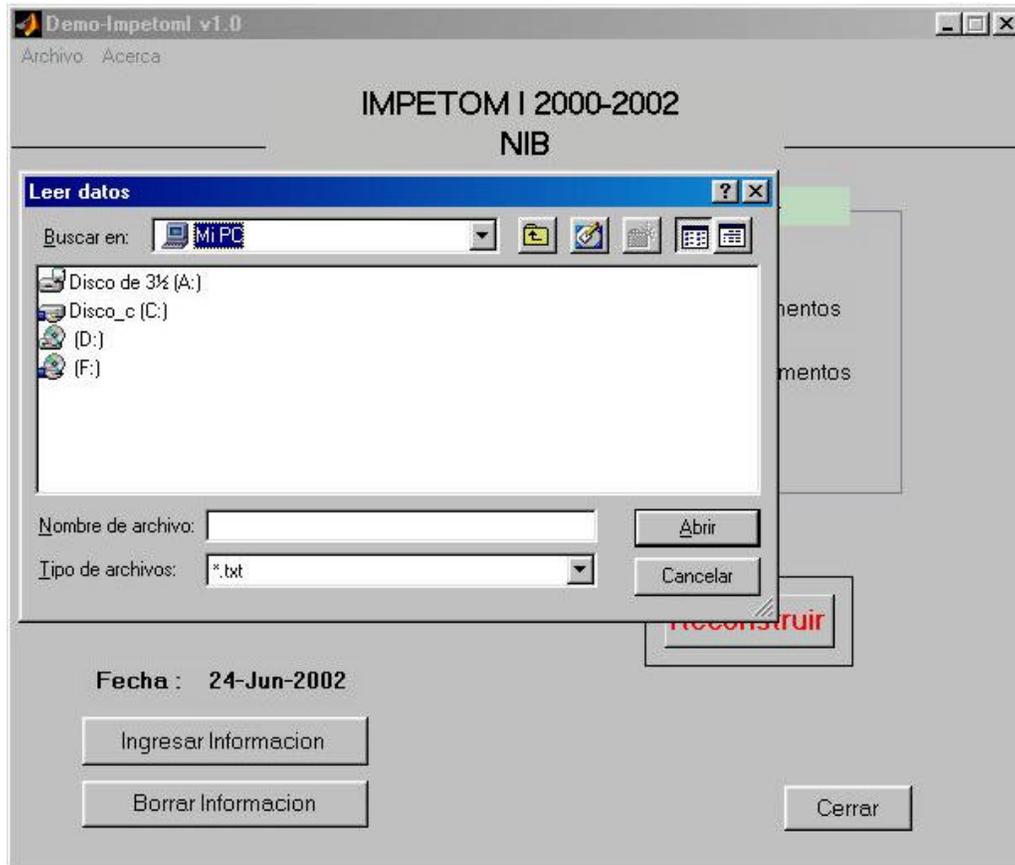


Figura 153 Leer medidas en el disco

Una vez que el usuario carga los datos a través de una de las diferentes formas, aparecerá en la ventana de inicio el botón de **RECONSTRUIR** en caracteres de color rojo. De esta manera el usuario sabe que el programa está pronto para reconstruir como lo muestra la figura 154.



Figura 154 Botón de reconstrucción

## 11.8 Reconstrucciones

IMPETOMI tiene implementado tres métodos de reconstrucción de forma no supervisada, es decir que no se hace necesario la intervención del usuario para la elección de los parámetros de regularización. Para la elección del método de reconstrucción el usuario debe elegir en menú 'pop up' cualquiera de los tres métodos:

### **MS: Matriz de Sensibilidad**

BP: Retroproyección (BackProjection)

NR: Newton Raphson

Como se ve en la figura 155:

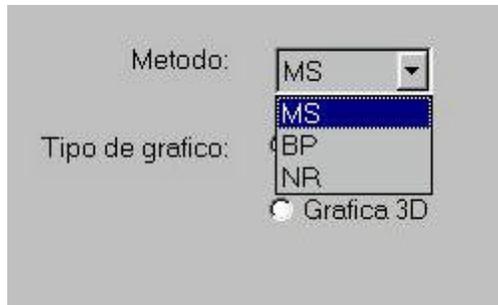


Figura 155 Elección del método de reconstrucción

### 11.9 Método Matriz de Sensibilidad y Retroproyección

Eligiendo MS o BP en el menú ‘pop up’, se pueden elegir las siguientes opciones antes de pasar a reconstruir. Una es el tamaño de la grilla que puede ser de 492 o 1968 elementos, esto es útil si se la quiere comparar con la reconstrucción hecha con Newton Raphson pues este método tiene la desventaja de poder solo reconstruir con una grilla de 492 elementos por las propias características del método implementado.

Para ello el usuario de ir al menú de grilla y simplemente elegir cual será la grilla que se utilizará:



Figura 156 Menú de elección de grilla

Por defecto el programa tiene predefinido reconstruir con 492 elementos, luego el usuario debe elegir el tipo de imagen que desea ver. IMPETOMI brinda la posibilidad de hacer una imagen en 3D, que posibilita al usuario estudiar de manera más gráfica la reconstrucción realizada. Por otra parte en la implementación de la imagen 3D tiene incluido un filtrado que suaviza los cambios en la imagen.



Figura 157 Tipo de gráfico

## IMPETOM I

Por último el usuario debe elegir si desea que en la figura se muestren los elementos delimitados en sus bordes con la siguiente opción, que por defecto no los muestra.

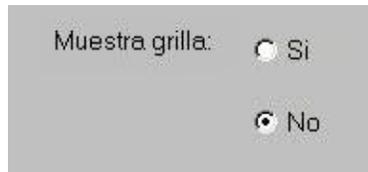
Una interfaz de usuario que muestra la etiqueta 'Muestra grilla:' seguida de dos botones de opción. El primer botón, etiquetado 'Si', no está seleccionado. El segundo botón, etiquetado 'No', está seleccionado, lo que indica que por defecto no se muestra la grilla.

Figura 158 Muestra grilla

Luego se procede a reconstruir presionando el botón de **RECONSTRUIR**, una vez hecha la reconstrucción los caracteres toman el color negro, indicando que se reconstruyó para esas medidas. En las siguientes figuras se mostrará la grilla en cada reconstrucción.

### 11.10 Imágenes en IMPETOMI

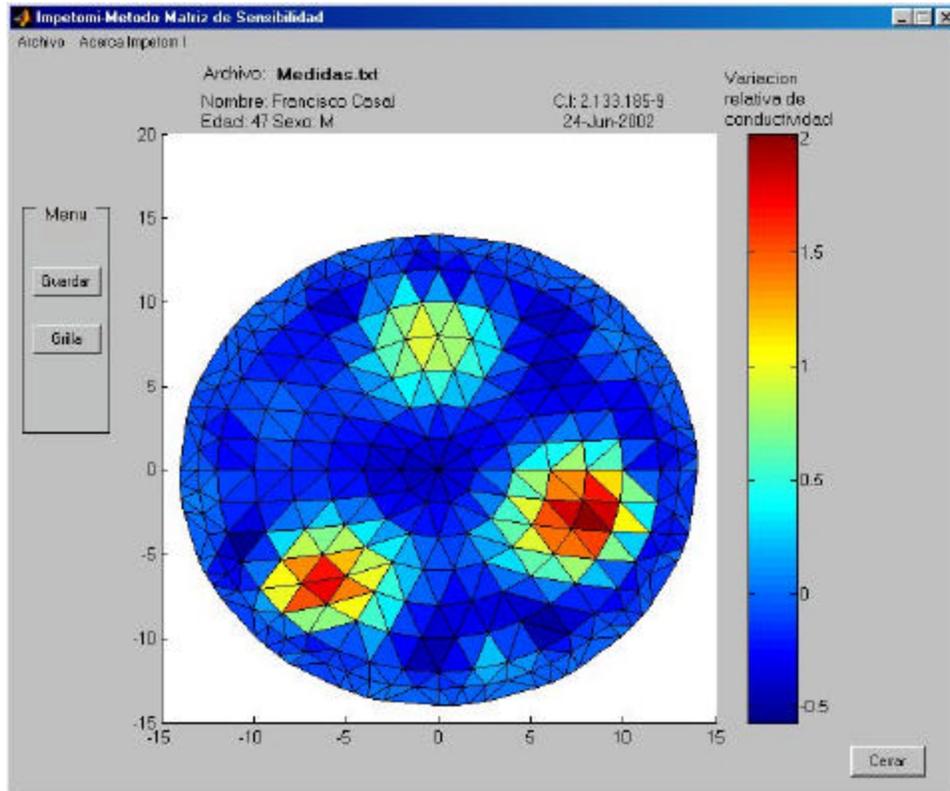


Figura 159 Reconstrucción

En la figura 159 se muestra la imagen producida por IMPETOMI para una grilla de 492 elementos en 2D utilizando el método de la Matriz de Sensibilidad (MS). Para el conjunto de medidas reales hechas en un fantomas con una configuración de 16 electrodos que se comentó en el capítulo 11. En el caso del método de la Matriz de Sensibilidad, la imagen representa la variación relativa de la conductividad calculada con respecto a una conductividad uniforme unitaria utilizando la siguiente fórmula:

$$\text{Variación relativa} = \frac{\mathbf{s} - \mathbf{s}_u}{\mathbf{s}_u} \quad \text{Ec. 11.1}$$

Donde  $\sigma$  representa la conductividad de la documentación y  $\sigma_u$  la conductividad uniforme. En el caso de Retroproyección (opción: BP) la imagen muestra el cociente de conductividades entre la  $\sigma$  y la  $\sigma_u$ , según la siguiente fórmula:

$$\text{Cociente de conductividades} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}_u} \quad \text{Ec. 11.2}$$

Mientras que en el método de Newton Raphson como lo indica la imagen utiliza unidades de  $\Omega\text{m}$  pues se reconstruye la resistividad absoluta.

La figura 12 de Reconstrucción muestra el siguiente menú:

## IMPETOM I

**GUARDAR:** permite guardar la imagen en el disco.

**GRILLA:** muestra una grilla en el fondo de la imagen, esta función es más útil en la visualización 3D.

**CERRAR:** cierra la figura

En la parte superior de la figura también muestran los datos del paciente que fueron ingresados utilizando la función **INGRESAR INFORMACIÓN**.

La figura contiene un pequeño menú **ARCHIVO** que tiene las siguientes funciones: **GUARDAR** y **GUARDAR COMO**, la última es útil para guardar distintas perspectivas en una imagen 3D. Así como también la función **CERRAR** figura.



Figura 160 Menú archivo

La escala de valores está dimensionada pues como se estudió anteriormente el método de la Matriz de Sensibilidad y Retroproyección construyen imágenes hechas a partir de cambios relativos de la conductividad frente a una distribución de conductividad homogénea.

En la siguiente figura se muestra la reconstrucción hecha con la grilla de 1968 elementos:

# IMPETOM I

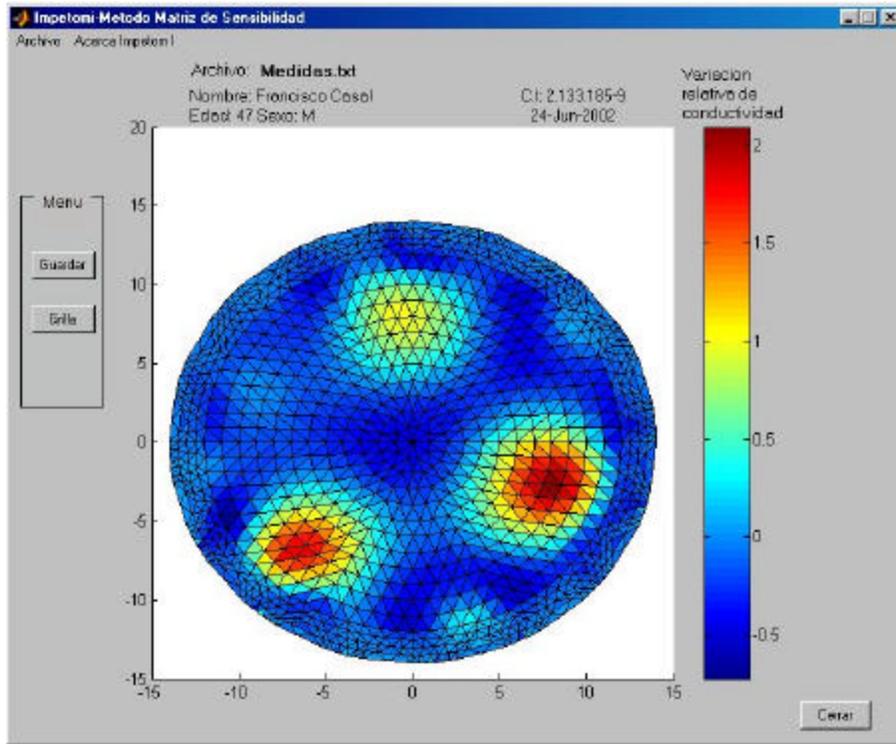


Figura 161 Reconstrucción en 1968 elementos

Eligiendo la opción de figura en 3D tenemos la figura 162, esta opción incluye la facilidad de poder rotarla con el botón ROTAR en el menú, figura 163.

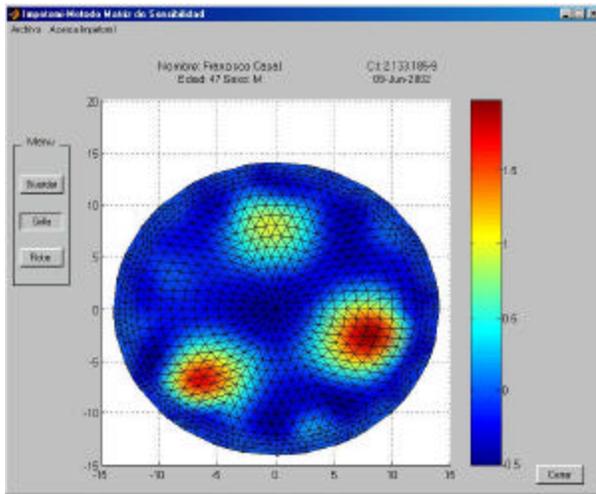


Figura 162 Reconstrucción con opción 3D

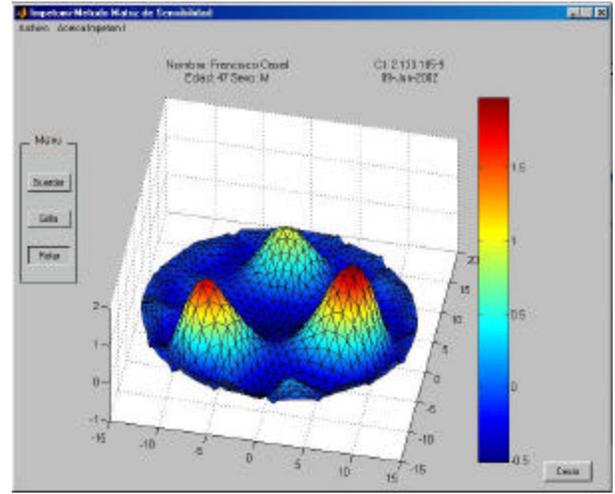


Figura 163 Reconstrucción en vista en 3D

### 11.11 Reconstrucción utilizando Newton Raphson

Para reconstruir utilizando este método el usuario debe elegir NR en el menú '*pop up*', con la diferencia con respecto a los anteriores de que no podrá elegir el tamaño de la grilla. Por lo que le aparecerá un nuevo menú en el que le deberá indicar a IMPETOMI el número de iteraciones deseado para la reconstrucción.

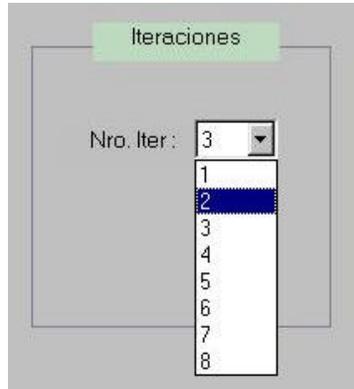


Figura 164 Elección de número de iteraciones

En la figura 164 muestra que sólo se permite hacer hasta 8 iteraciones, dado que los resultados prácticos mostraron que la calidad de la imagen aumentaba significativamente y por otra parte el tiempo de reconstrucción aumentaba en gran medida. También se puede elegir los tipos de imagen 2D y 3D.

## IMPETOM I

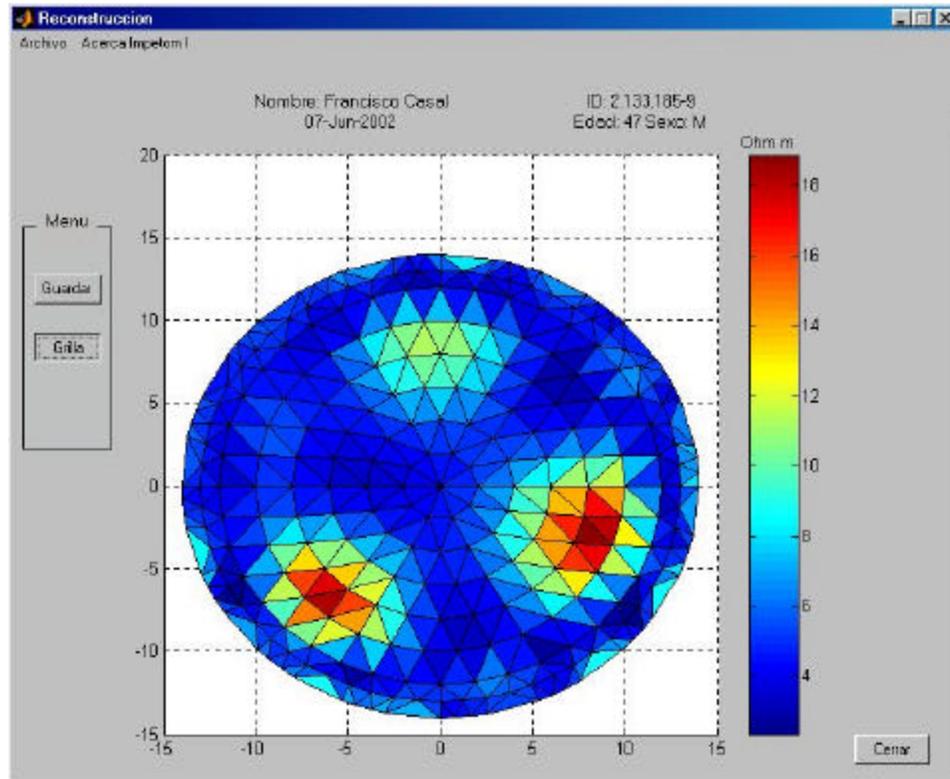


Figura 165 Reconstrucción hecha con Newton Raphson

Como se puede apreciar en la figura 165, la reconstrucción es hecha con una grilla de 462 elementos, también se puede ver que como este método reconstruye distribuciones de resistividad absoluta se muestran las unidades en la escala de valores.

### 11.12 Guardar las figuras

Por último si deseamos guardar la figura, el usuario sólo debe presionar el botón guardar y le aparecerá la siguiente ventana de dialogo:

## IMPETOM I

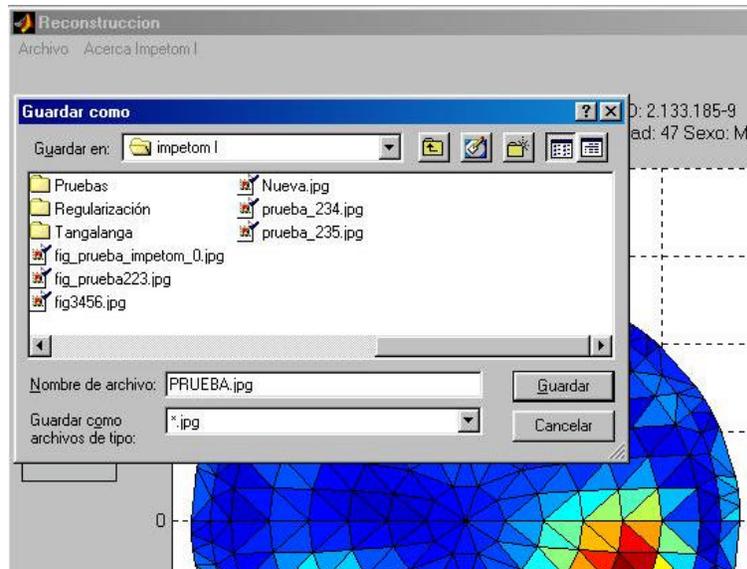


Figura 166 Salvar la imagen de reconstrucción

Donde el usuario puede elegir el directorio y el nombre de la figura. Luego la imagen puede ser visualizada en cualquier editor de imágenes.

### 11.13 Formato de archivo

IMPETOMI lee los archivos de medidas que IMPETOM C escribe en el disco, se acordó con dicho grupo las siguientes reglas para el armado del archivo de intercambio.

1. Los archivos sólo contendrán las medidas
2. El formato de dichos archivos será ASCII por lo que la extensión será .TXT de forma que las medidas podrán ser leídas en cualquier editor de texto convencional.
3. El orden de las medidas será tal que comenzarán siempre a escribirse desde la primera posición de inyección de corriente continuando en forma antihoraria con las siguientes medidas.
4. La cantidad de medidas por archivo será de 256 pues se incluirán las medidas en los electrodos de corriente y adyacentes.

La disposición de las medidas en el archivo debe concordar con la dispuesta en la rutina que recoge los datos. Para cada posición del par inyector de corriente, las medidas de voltaje se enumeran siempre a partir del primer par de electrodos de medida.

## IMPETOM I

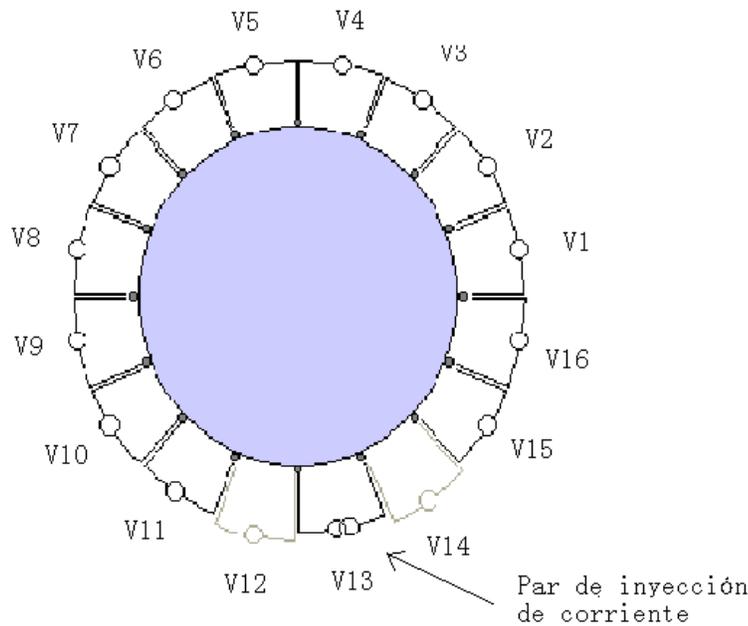


Figura 167 Indexación de medidas, sin importar por donde se inyecta siempre se debe a empezar a medir por el mismo par de electrodo.

Como ejemplo, en la figura 167 se muestra la disposición conceptual de los electrodos para cuando se usa el par de electrodos decimotercero como par de inyección. Las medidas realizadas con esta configuración de electrodos de corriente se ordenan en forma descendente en el vector de medidas, comenzando con el voltaje medido en el par uno (V1), siguiendo con V2, etc., hasta llegar a V16.

Se eligió un par de electrodos como referencia fija para todas las posiciones de inyección de corriente. Al variar los electrodos de corriente se continúa ingresando las medidas a partir de V1.

La representación de las medidas en el archivo admite representación exponencial mediante el formato  $e \pm < \text{exp} >$ , como se muestra en el siguiente ejemplo :

```
1.1366392719077361e+000
1.0903362920248241e+000
3.5692141362266711e-001
1.8127679360142651e-001
```

La cantidad de cifras de la mantisa es de 18.

Estas medidas pueden estar dispuestas en forma de vector columna o en forma de matriz en el archivo. Donde cada columna representa una inyección de corriente y cada fila la medida correspondiente según su posición, por lo que la matriz tendría 16 x 16.

Como lo muestra el siguiente esquema:

## IMPETOM I

$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$\dots$	$m_{1,16}$
$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$	$\dots$	$m_{i,j}$	$\vdots$
$m_{16,1}$	$\dots$	$\dots$	$m_{16,16}$

Donde  $i$  representa la inyección de corriente  $i$ -ésima y  $j$  a la medida  $j$ -ésima para dicha inyección. De esta forma IMPETOM I intenta facilitar la tarea de Impetom C incrementando el número de posibilidades para la escritura de los archivos.

En el capítulo referente a las posibilidades futuras de IMPETOMI se detallarán más posibil

## 12 Tiempos y Costos

### 12.1 Introducción

En este capítulo se realizará un análisis de los costos y tiempos insumidos en el proyecto e implementación de IMPETOMI

La planificación inicial fue de 2700 horas, según la especificación de Agosto de 2000. Se describe en primer lugar los tiempos de desarrollo indicando mojones y resultados intermedios. Luego se incorporan al análisis los costos derivados del esfuerzo de desarrollo y de las compras realizadas.

El último párrafo analiza diferentes escenarios económicos de distribución de IMPETOMI.

### 12.2 Tiempos

El esfuerzo de desarrollo fue registrado a lo largo del proyecto en un “cuaderno de proyecto”, que contiene la información técnica además de aspectos administrativos a modo histórico. El tipo de tareas fue clasificado de acuerdo a:

<b>Tarea</b>	<b>Total</b>	<b>%</b>
Estudio Proyecto	1718	43
Implementación y desarrollo	1295	32
Documentación	701	17
Horas Docente	52	1
Asistencia a cursos	28	1
Tareas Administrativas	244	6
<b>Totales</b>	<b>4039</b>	<b>100</b>

Tabla 8 Distribución de horas por rubro

## IMPETOM I

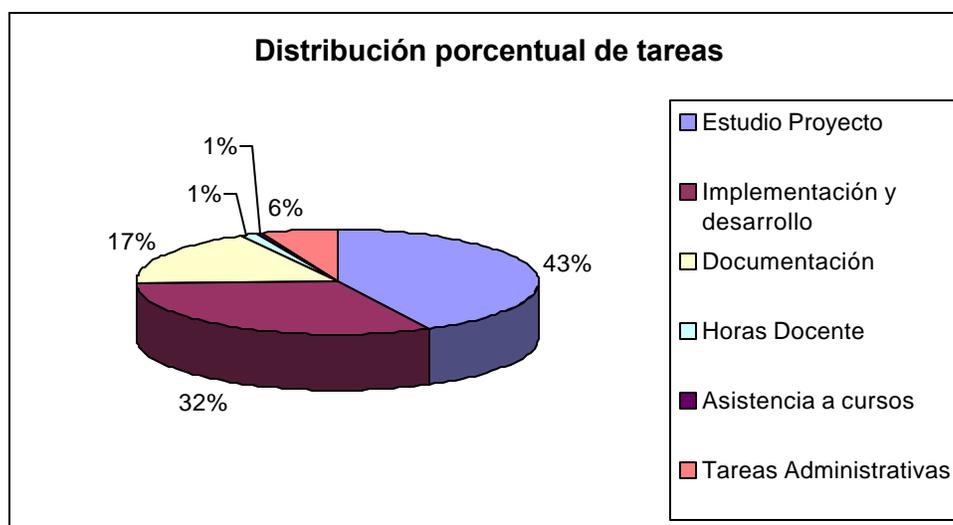


Figura 168 Distribución de tareas sobre el tiempo total

En las Tablas 9, 10 y 11 se representan los tiempos insumidos por los distintos rubros discriminados mensualmente. En la Figura 12 se grafican las horas-hombre discriminadas mensualmente y en la Figura 13 discriminadas por rubros.

Rubros	Ago-00	Sep-00	Oct-00	Nov-00	Dic-00	Ene-01	Feb-01	Mar-01
Estudio Proyecto	73	120	115	115	122	97	90	70
Implementación y desarrollo					10	45	50	65
Documentación	45	15	5	1	7	2	10	12
Horas Docente		4	4	7				
Asistencia a cursos								
Tareas Administrativas	20	10	5	20	10	10	7	3
<b>Totales</b>	<b>138</b>	<b>149</b>	<b>129</b>	<b>143</b>	<b>149</b>	<b>154</b>	<b>157</b>	<b>150</b>

Tabla 9 Distribución de tareas por mes (Ago-00 a Mar-01)

Rubros	Abr-01	May-01	Jun-01	Jul-01	Ago-01	Sep-01	Oct-01	Nov-01
Estudio Proyecto	63	60	63	70	82	111	70	47
Implementación y desarrollo	72	85	58	58	57	65	72	55
Documentación	5	3		4	2		100	130
Horas Docente		5	11	4			5	1
Asistencia a cursos			12			4	12	
Tareas Administrativas	25	7	2	6	15	19	11	10
<b>Totales</b>	<b>165</b>	<b>160</b>	<b>146</b>	<b>142</b>	<b>156</b>	<b>199</b>	<b>270</b>	<b>243</b>

# IMPETOM I

Tabla 10 Distribución de tareas por mes (Abr-01 a Nov-01)

Rubros	Dic-01	Ene-02	Feb-02	Mar-02	Abr-02	May-02	Jun-02	Total	%
Estudio Proyecto	21		86	52	100	72	19	1718	43
Implementación y desarrollo			125	145	131	147	55	1295	32
Documentación	30		30	70	60	115	55	701	17
Horas Docente			1		2	4	4	52	1
Asistencia a cursos								28	1
Tareas Administrativas	6		25	7	2	12	12	244	6
<b>Totales</b>	<b>57</b>	<b>0</b>	<b>267</b>	<b>274</b>	<b>295</b>	<b>350</b>	<b>145</b>	<b>4039</b>	<b>100</b>

Tabla 11 Distribución de tareas por mes (Dic-01 a Jun-02)

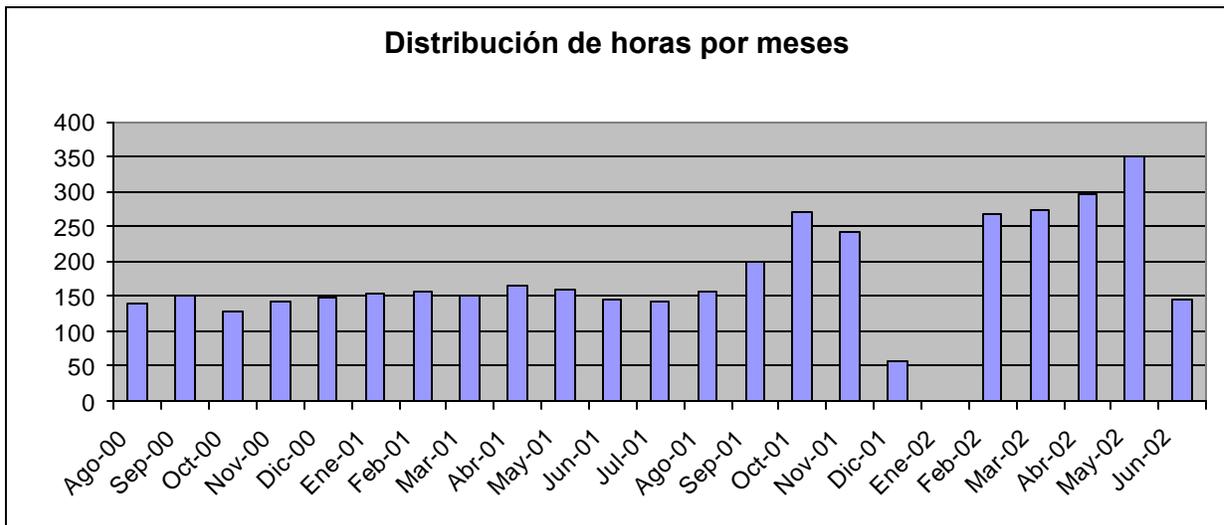


Tabla 12 Distribución de horas por mes

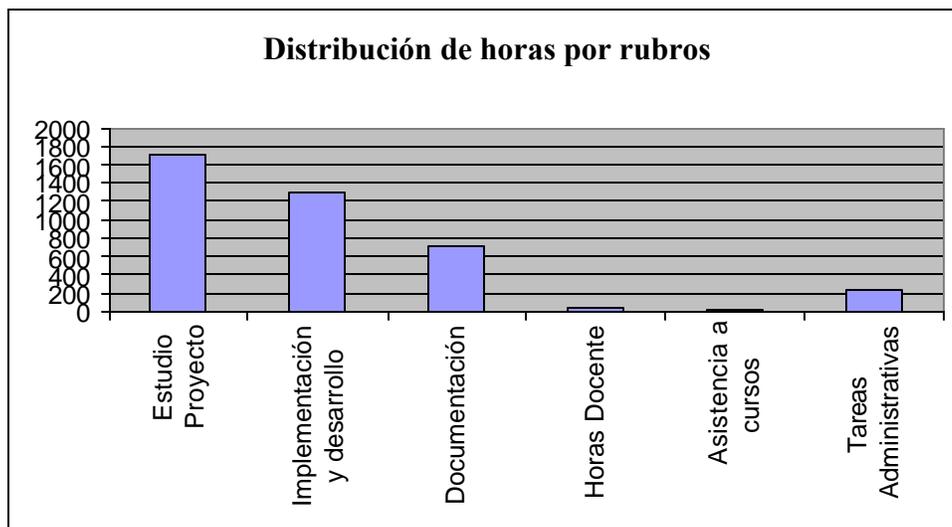


Tabla 13 Distribución de horas por rubro

### 12.3 Costos de desarrollo

Los costos de desarrollo se podrían diferenciar en dos partes:

#### 12.3.1 Compras

Rubro	U\$\$
Papelería	320
Cartuchos Impresora	70
CD's	280
Fotocopias	120
Paper	12
Navegación Adinet	600
Matlab v6.0	1625
Visual Studio v3.0	3900
Varios	1350
<b>Total</b>	<b>8277</b>

Tabla 14 Costos por compras

#### 12.3.2 Costos de desarrollo

Estos se reflejan en las horas-hombre insumidas para la realización del Proyecto.

La dedicación horaria siguió la evolución de las tablas 9, 10 y 11, por un total de 4039 horas-hombre.

Estimando en U\$\$ 20 la Hora-Hombre, surgen los costos discriminados por rubro como en tabla 15

Tarea	Horas	U\$\$
Búsqueda bibliográfica	<b>565</b>	<b>11,300</b>
Búsqueda de material	<b>159</b>	<b>3,180</b>
Estudio	<b>828</b>	<b>16,560</b>
Programación en Matlab	<b>865</b>	<b>17,300</b>
Compilación	<b>308</b>	<b>6,160</b>
Instalación de programas	<b>122</b>	<b>2,440</b>
Evaluaciones	<b>166</b>	<b>3,320</b>
Documentación	<b>701</b>	<b>14,020</b>
Horas Docente	<b>52</b>	<b>1,040</b>
Asistencia a cursos	<b>28</b>	<b>560</b>
Varios	<b>244</b>	<b>4,880</b>
<b>Totales</b>	<b>4039</b>	<b>80,778</b>

Tabla 15 Costos de desarrollo por tarea

## IMPETOM I

En resumen:

	U\$S	%
Costos de compras	8277	9
Costos de desarrollo	80778	91
Costos totales	89055	100

Tabla 16 Resumen de costos

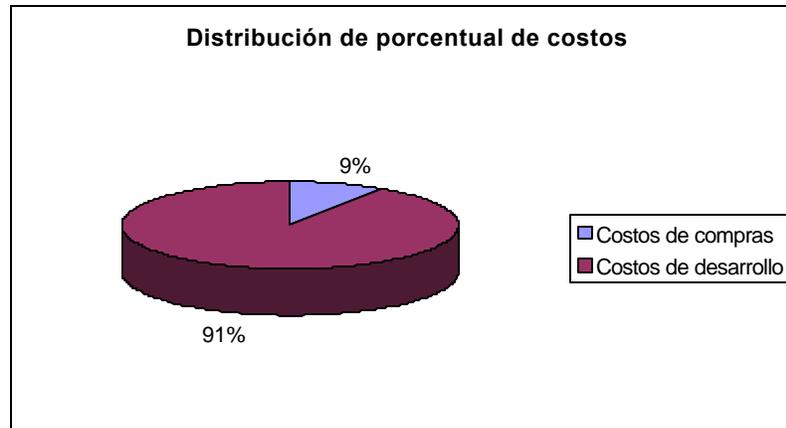


Figura 169 Distribución de costos sobre el total

### 12.4 Posibilidades de comercialización de IMPETOMI

A continuación se realiza un estudio de la viabilidad económica del desarrollo de IMPETOMI si se hubiese pensado como un proyecto empresarial, por otro lado también se estudia la viabilidad del desarrollo de una versión comercial de IMPETOMI una vez finalizado el proyecto de fin de carrera.

En ambos puntos se desprecia en el costo de cada licencia, el costo de cada CD y la papelería necesaria (folletos, manuales, etc).

#### 12.4.1 Desarrollo como proyecto empresarial

El costo de desarrollo de IMPETOMI v1.0 es aproximadamente U\$S 90.000. Desarrollar una nueva versión: IMPETOMI v2.0 lista para comercializarse tendría un costo estimado de U\$S 16.000 (una estimación de aproximadamente 8000 horas hombre). Se llega a un total de U\$S 106.000 para lograr un producto comercializable.

A lo anterior se debería agregar el costo de creación de una empresa de distribución y soporte del software IMPETOMI, donde se debe tener el cuenta el gasto en infraestructura, software de desarrollo, etc. El sobrecosto se estima en aproximadamente U\$S 10.000. Con esto se llega a un total de U\$S 126.000. Existe además una dependencia con el hardware que actualmente está

## IMPETOM I

desarrollando el grupo de proyecto IMPETOMC. Se supone entonces que IMPETOMC logra un precio de venta de cada dispositivo con sus correspondientes electrodos de aprox. U\$S 1000

(precio de plaza). Estas suposiciones se fundamentan en que el costo de los componentes del dispositivo de medida que logra IMPETOMC rondan los U\$S 400 a la fecha.

Debido al estado de avance de la EIT actualmente existen muy pocos sistemas de tomografía por impedancia en el mercado, de los que no tenemos idea de precios. En la tabla 17 siguiente se detallan el número de licencias que sería necesario vender para amortizar los U\$S 110.000 suponiendo tres precios posibles de venta.

Precio de venta de cada licencia	Número de licencias que amortiza
2000	126
3000	63
4000	42
5000	32

Tabla 17 amortización de la inversión

Como el número de unidades a vender es muy alto para el pequeño mercado uruguayo, no sería viable la realización del proyecto empresarial desde cero, a menos que se hubiese pensado en la exportación del producto. Debe tenerse en cuenta que, debido a su significativa baja calidad de imagen relativa respecto a otras técnicas de tomografía, el precio de venta del producto IMPETOM debe mantenerse muy por debajo del precio de los equipos convencionales de tomografía para permanecer competitivo. Dado lo extraordinariamente elevados que son esos precios se estima que un precio de venta final de U\$S 4000 sería aceptable, con lo que la venta de 42 licencias amortizaría la inversión inicial. Los costos de producción debidos a la folletería, manuales y CDs y los gastos fijos mensuales en alquiler de un apartamento o local, impuestos, etc se estiman en U\$S 1000. Estos costos serían cubiertos con los beneficios del soporte prestado a los equipos vendidos. Este soporte consistiría en la atención de posibles consultas o fallas de IMPETOMI, y se estima en una atención mensual por licencia de dos horas de duración. En estas condiciones y habiendo vendido al menos las 42 copias mínimas sería necesario disponer de 84 horas hombre mensuales, 21 horas semanales suponiendo que la atención se realiza de lunes a viernes. A un precio de venta de U\$S 20 la hora de soporte, se obtendrían U\$S 1680 mensuales por este concepto, suficientes para mantener la empresa aunque merme la venta de licencias. En la tabla 18 se repite este análisis para el caso en que se logran vender 10, 100 y 1000 licencias.

Número de licencias vendidas	Ingreso por concepto de soporte
10	400
100	4000
1000	40000

Tabla 18 ingresos por soporte

### 12.4.2 Desarrollo de una versión comercial

Suponiendo que se continúa con el desarrollo de una versión comercial de IMPETOMI una vez finalizado el proyecto de fin de carrera y si no se incluyen los costos de éste se deberían descontar los U\$S 80.000 estimados. En estas condiciones sólo deberían tomarse en cuenta los restantes U\$S 36.000 por lo que la tabla 18 se ve modificada, obteniendo los resultados de la tabla 19:

Precio de venta de cada licencia	Número de licencias que amortiza
2000	36
3000	18
4000	12
5000	9

Tabla 19 amortización de la inversión

Suponiendo un precio de venta de IMPETOMI en U\$S 4.000 para hacerlo muy competitivo en el mercado sólo es necesario vender 12 licencias para amortizar los U\$S 36.000. Esto es muy alentador ya que es un número razonable para el mercado uruguayo. También hay que tener en cuenta la posibilidad de asociación con un especialistas en patologías pulmonares junto con una empresa desarrolladora de software con el fin de lograr un producto de mayor calidad y respaldo ampliando así la posibilidad de penetrar en el mercado. Cabe resaltar la ventaja sobre los competidores extranjeros de tener aquí a las personas que lo desarrollaron.

De los puntos anteriores se concluye que mientras que un desarrollo completo del producto no es viable económicamente, si lo sería la creación de una versión comercial de IMPETOM I para lo que sería necesario hacer un estudio más acabado del mercado y las posibles asociaciones antes mencionadas.

# Apéndice A La relación de sensibilidad de Geselowitz

En este apéndice se explica la relación de sensibilidad desarrollada por Barber (1990). La relación de sensibilidad vista anteriormente en el capítulo 5 es la siguiente:

$$g = \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f} \cdot \nabla \Psi \, dv \quad \text{Ec. A.1}$$

Donde  $\mathbf{s}$  es la conductividad de la región  $\Omega$ ,  $\nabla \phi$  y  $\nabla \psi$  son los gradientes de potencial los cuales se generan cuando una corriente unitaria se aplica a un par de electrodos de  $\Omega$ ,  $g$  es la medida de voltaje entre uno de los pares de electrodos cuando una corriente unitaria es aplicada a la región por el otro par de electrodos.

Esto se puede plantear en función de la conductividad uniforme  $\sigma_u$ :

$$g = \int_{\Omega} (\mathbf{s}_u + \mathbf{s}_p) (\nabla \mathbf{f}_u + \nabla \mathbf{f}_p) (\nabla \Psi_u + \nabla \Psi_p) \, dv \quad \text{Ec. A.2}$$

Donde:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_u + \mathbf{s}_p \quad \text{Ec. A.3}$$

$$g = g_u + g_p \quad \text{Ec. A.4}$$

$$\nabla \mathbf{f} = \nabla \mathbf{f}_u + \nabla \mathbf{f}_p \quad \text{Ec. A.5}$$

$$\nabla \Psi = \nabla \Psi_u + \nabla \Psi_p \quad \text{Ec. A.6}$$

Donde  $u$  y  $p$  representan los valores uniforme y perturbado.

Desarrollando parte de la ecuación A2 se obtiene:

$$g = \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_u \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_p \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_p \, dv \quad \text{Ec. A.7}$$

a partir de la formula 5.6:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}_u \mathbf{s} \nabla \Psi_p \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{f}_u \nabla \cdot (\mathbf{s} \nabla \Psi_p) \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_u \, dv \quad \text{Ec. A.8}$$

dónde  $\Gamma$  es la frontera de  $\Omega$  y  $ds$  es un vector unitario normal a la superficie.

De la ecuación 3.11:

$$\mathbf{s}\nabla^2\Psi + \nabla\mathbf{s}\cdot\nabla\Psi = 0 \quad \text{Ec. A.9}$$

Como  $\Psi = \Psi_u + \Psi_p$  y  $\nabla^2\Psi_u = 0$ , entonces:

$$\mathbf{s}\nabla^2\Psi_p = -\nabla\mathbf{s}\cdot\nabla\Psi \quad \text{Ec. A.10}$$

De la ecuación A.9 desarrollamos  $\nabla\cdot(\mathbf{s}\nabla\Psi_p)$ :

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{s}\nabla\Psi_p) &= \nabla\mathbf{s}\cdot\nabla\Psi_p + \mathbf{s}\cdot\nabla^2\Psi_p \\ &= \nabla\mathbf{s}\cdot\nabla\Psi_p - \nabla\mathbf{s}\cdot\nabla\Psi \\ &= \nabla\mathbf{s}\cdot\nabla\Psi_p - \nabla\mathbf{s}\cdot\nabla\Psi_u - \nabla\mathbf{s}\cdot\nabla\Psi_p \\ &= -\nabla\mathbf{s}\cdot\nabla\Psi_u \end{aligned} \quad \text{Ec. A.11}$$

entonces la ecuación A.9 queda:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}_u \mathbf{s} \nabla \Psi_p ds = - \int_{\Omega} \mathbf{f}_u \nabla \mathbf{s} \cdot \nabla \Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.12}$$

como  $\nabla\mathbf{s}_u = 0$  entonces  $\nabla\mathbf{s}_p = \nabla\mathbf{s}$ , por lo tanto:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}_u \mathbf{s} \nabla \Psi_p ds = - \int_{\Omega} \mathbf{f}_u \nabla \mathbf{s}_p \cdot \nabla \Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.13}$$

a partir de la ecuación 5.6:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}_u \mathbf{s}_p \nabla \Psi_u ds = \int_{\Omega} \mathbf{f}_u \nabla \cdot (\mathbf{s}_p \nabla \Psi_u) dv + \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.14}$$

realizando un desarrollo similar al de la ecuación A.12;  $\nabla(\mathbf{s}_p \nabla \Psi_p) = -\nabla\mathbf{s}_p \cdot \nabla \Psi_u$  por lo tanto:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}_u \mathbf{s}_p \nabla \Psi_u ds = \int_{\Omega} \mathbf{f}_u \nabla \mathbf{s}_p \cdot \nabla \Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.15}$$

Sumando las ecuaciones A.13 y A.15:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}_u \mathbf{s}_p \nabla \Psi_u ds + \int_{\Gamma} \mathbf{f}_u \mathbf{s} \nabla \Psi_p ds = \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.16}$$

La expresión  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \mathbf{s} \nabla \Psi ds$  se puede desarrollar de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \mathbf{s} \nabla \Psi ds = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \mathbf{s}_u \nabla \Psi_u ds + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \mathbf{s}_p \nabla \Psi_u ds + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \mathbf{s} \nabla \Psi_p ds \quad \text{Ec. A.17}$$

El término  $\mathbf{s} \nabla \Psi ds$  es la corriente normal que atraviesa la frontera después de los cambios en  $\sigma$  mientras que  $\mathbf{s}_u \nabla \Psi_u ds$  es la misma corriente previa a los cambios. Como la corriente que utilizamos es constante, dichos términos son iguales, por lo tanto la ecuación anterior queda:

## IMPETOM I

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \nabla \mathbf{s}_p \nabla \Psi_u ds + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \mathbf{s} \nabla \Psi_p ds = 0 \quad \text{Ec. A.18}$$

Entonces aplicando la igualdad anterior en la ecuación A.16, llegamos a:

$$\int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_u dv = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.19}$$

Utilizando un argumento similar llegamos a:

$$\int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_p dv = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.20}$$

Por lo tanto utilizando los resultados A.19 y A.20 la ecuación A.7 se transforma en:

$$g = \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv - 2 \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_p dv \quad \text{Ec. A.21}$$

El primer término de la ecuación anterior se puede desarrollar de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv = \int_{\Omega} \mathbf{s}_u \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.22}$$

Entonces la ecuación A.21 se transforma en:

$$g = \int_{\Omega} \mathbf{s}_u \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_p dv \quad \text{Ec. A.23}$$

Teniendo en cuenta la ecuación A.4:

$$g_u = \int_{\Omega} \mathbf{s}_u \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv$$

Entonces:

$$g_p = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_p dv \quad \text{Ec. A.24}$$

En la ecuación A.21 el segundo termino es pequeño si  $\mathbf{s}_p$  es pequeña por lo que puede ser ignorado, por lo tanto la aproximación que obtendremos en este Apéndice es válida para pequeñas perturbaciones de la conductividad uniforme.

Entonces los cambios de los valores de las medidas sobre la frontera se pueden expresar de la siguiente forma:

$$g_p = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.25}$$

Considerando el segundo termino, podemos escribir:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}_p \mathbf{s} \nabla \Psi_p ds = \int_{\Omega} \mathbf{f}_p \nabla \cdot (\mathbf{s} \nabla \Psi_p) dv + \int_{\Omega} \mathbf{s} \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_p dv \quad \text{Ec. A.26}$$

También podemos escribir:

## IMPETOM I

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}_p \mathbf{s}_p \nabla \Psi_u ds = \int_{\Omega} \mathbf{f}_p \nabla \cdot (\mathbf{s}_p \nabla \Psi_u) dv + \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_p \nabla \Psi_u dv \quad \text{Ec. A.27}$$

Considerando argumentos mostrados anteriormente:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_p \cdot \nabla \Psi_p) dv = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_p dv \quad \text{Ec. A.28}$$

Sustituyendo:

$$g_p = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_u dv - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi_p dv \quad \text{Ec. A.29}$$

Finalmente:

$$g_p = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_p \nabla \mathbf{f}_u \nabla \Psi dv \quad \text{Ec. A.30}$$

La cual es la expresión de Geselowitz.

## Apéndice B Método de Elementos Finitos

### Representación de un campo de una dimensión

Considerar el problema de encontrar una expresión matemática  $u(x)$  que represente un campo de una dimensión, por ejemplo la medida de la temperatura  $\tilde{u}$  en función de la distancia  $\tilde{x}$  a lo largo de una barra como lo muestra la figura 67(a) donde los puntos son las medidas de temperatura.

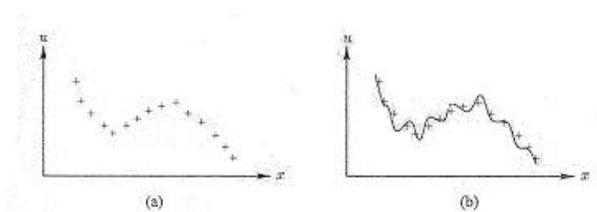


Figura 170 Temperatura en función de la posición

Una forma es utilizar una expresión polinomial  $u(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$  y estimar los valores de los parámetros  $a, b, c, d, \dots$  aproximando por mínimos cuadrados en las medidas.

A medida que se aumenta el grado del polinomio se logra mayor exactitud en los puntos de medida y además el hecho de ser un polinomio permite diferenciar o integrar la expresión fácilmente.

El problema surge al aumentar considerablemente el grado del polinomio de forma de lograr una mayor exactitud, el polinomio comienza a oscilar inaceptablemente entre los puntos de medida como lo muestra la figura 67 (b).

Para evitar esto, manteniendo las ventajas de los polinomios de bajo orden, se divide la barra en tres subregiones y se utiliza polinomios de bajo orden en cada subregión llamada *elemento*.

En la figura 68(b) podemos apreciar tres polinomios lineales aproximados independientemente a las medidas por mínimos cuadrados en cada elemento.

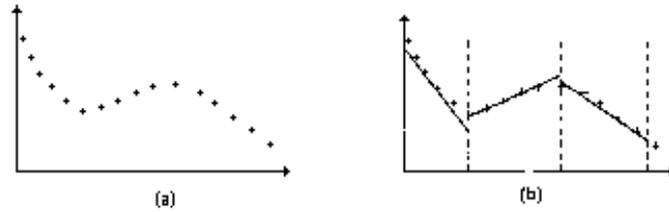


Figura 171 Campo y aproximaciones lineales a trozos

**Funciones base lineales**

Un nuevo problema aparece en la figura 2(b): los polinomios lineales a trazos no son continuos en  $\tilde{u}$  en las fronteras entre los elementos.

Una solución es forzar los parámetros  $a, b, c, d, \dots$  para asegurar la continuidad de  $\tilde{u}$  en las fronteras de los elementos, pero una mejor solución es reemplazar los parámetros  $a$  y  $b$  en el primer elemento por los parámetros  $u_1$  y  $u_2$  los cuales son los valores de  $\tilde{u}$  en los extremos del elemento.

Se puede definir entonces una variación lineal entre estos dos valores ( $u_1$  y  $u_2$ ) de la siguiente forma;

$$u(\mathbf{e}) = (1 - \mathbf{e})u_1 + \mathbf{e}u_2 \tag{Ec. B.1}$$

Donde  $\mathbf{e}$  ( $0 \leq \mathbf{e} \leq 1$ ) es una medida normalizada de la distancia a lo largo de la curva.

Se define:

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{e}) = 1 - \mathbf{e} \tag{Ec. B.2}$$

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \tag{Ec. B.3}$$

por lo tanto:

$$u(\mathbf{e}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{e})u_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{e})u_2 \tag{Ec. B.4}$$

Esta expresión son las funciones bases asociadas con los valores  $u_1$  y  $u_2$  en los nodos.

Las funciones bases  $\mathbf{j}_1(\mathbf{e})$  y  $\mathbf{j}_2(\mathbf{e})$  son líneas rectas que varían entre 0 y 1 como lo muestra la figura 69.

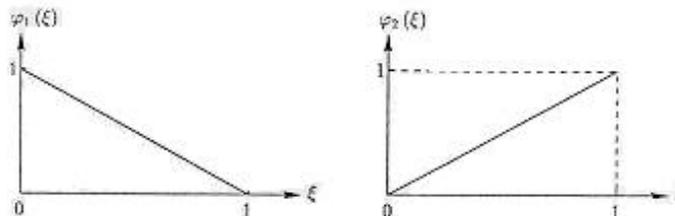


Figura 172 Parametrización en las funciones base

## IMPETOM I

Siempre es conveniente asociar el valor en el nodo  $u_n$  con el elemento y el nodo  $n$  y mapear la temperatura  $U_\Delta$  definida en el nodo global  $\Delta$ , sobre el nodo local  $n$  del elemento  $e$  mediante el uso de una matriz de conectividad, por ejemplo:

$$u_n = U_{\Delta(n,e)} \quad \text{Ec. B.5}$$

donde  $\Delta(n,e)$  es el número global del nodo local  $n$  del elemento  $e$

Ejemplo:

La figura 70 muestra la relación entre los nodos globales y los nodos de cada elemento:

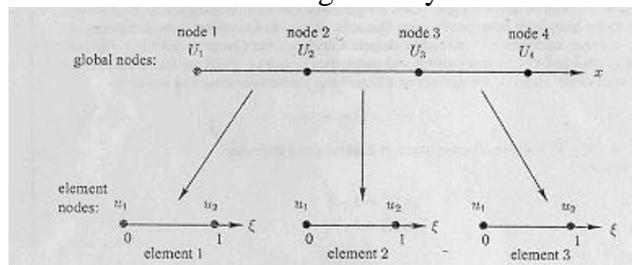


Figura 173 Mapeo a las coordenadas locales

Para el primer elemento (primera interpolación):

$$u(\mathbf{e}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{e})u_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{e})u_2 \quad \text{Ec. B.6}$$

Donde

$$u_1 = U_1 \text{ y } u_2 = U_2 \quad \text{Ec. B.7}$$

Para el segundo elemento:

$$u(\mathbf{e}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{e})u_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{e})u_2 \quad \text{Ec. B.8}$$

Donde:

$$u_1 = U_2 \text{ y } u_2 = U_3 \quad \text{Ec. B.9}$$

El parámetro  $U_2$  es compartido entre el primer y el segundo elemento por lo que se verifica la continuidad de la temperatura.

De la misma forma en el tercer elemento  $\tilde{u}$  se interpola de la siguiente forma:

$$u(\mathbf{e}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{e})u_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{e})u_2 \quad \text{Ec. B.10}$$

Donde:

$$u_1 = U_3 \text{ y } u_2 = U_4 \quad \text{Ec. B.11}$$

El parámetro  $U_3$  es compartido entre el segundo y el tercer elemento verificando la continuidad de la temperatura.

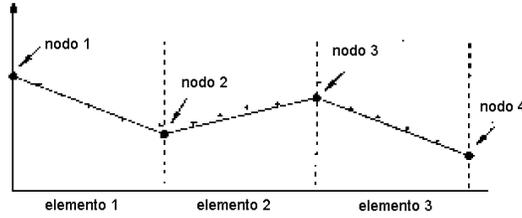


Figura 174 Interpolación con las funciones base

En la figura 71 se puede apreciar la interpolación tomando los nodos como parámetros y las funciones base. En este caso la temperatura es continua en los nodos o sea en la frontera de los elementos.

**Funciones Base como funciones de ponderación**

Es útil interpretar a las funciones base como funciones que ponderan las medidas en los nodos.

Por ejemplo en primer elemento:

Para  $e = 0$   $u(0) = (1 - 0)u_1 + 0u_2 = u_1$

Corresponde al valor de  $u$  en el lado izquierdo del elemento el cual es independiente de  $u_2$

Para  $e = 1/4$   $u(1/4) = (1 - 1/4)u_1 + 1/4u_2 = 3/4u_1 + 1/4u_2$

El resultado depende de  $u_1$  y de  $u_2$  teniendo un mayor peso la dependencia de.

Para el caso de  $e = 1/2$  la dependencia de  $u_1$  y de  $u_2$  es idéntica mientras que para  $e = 3/4$  la dependencia mayor es de  $u_2$ .

Para  $e = 1$   $u(1) = (1 - 1)u_1 + 1u_2 = u_2$

Corresponde al valor de  $u$  en el lado derecho del elemento el cual es independiente de  $u_1$

Además las funciones de peso pueden ser consideradas como *funciones globales* como lo muestra la figura 72 donde la función global  $w_n$  asociada al nodo global  $n$  se construye a partir de las funciones base en los elementos adyacentes a dicho nodo.

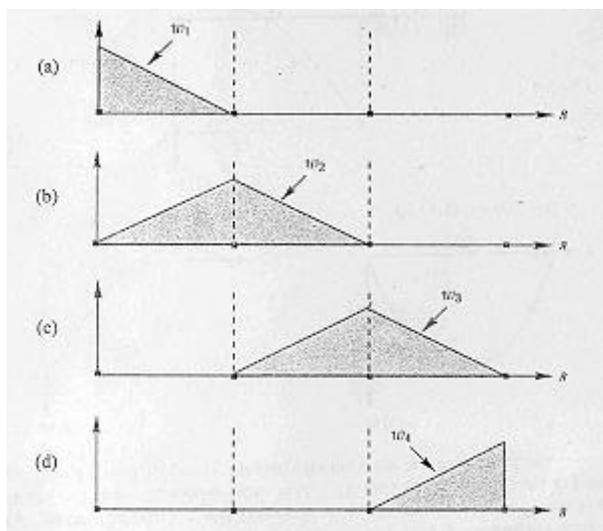


Figura 175 funciones base para cada nodo

Como se muestra en la figura 72 la *funcion global*  $w_2$  le da mayor peso al parámetro global  $U_2$ , y la influencia de dicho parámetro decae linealmente en ambos elementos adyacentes a dicho nodo.

Ahora se logro una descripción paramétrica a trazos de la temperatura  $u(\mathbf{e})$ , pero para poder definir  $u(x)$  es necesario definir la relación entre  $x$  y  $\mathbf{e}$  para cada elemento.

Una forma es definir  $x$  como una interpolación entre los valores de  $x$  de los nodos.

Por ejemplo para el primer elemento:

$$x(\mathbf{e}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{e})x_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{e})x_2 \quad \text{Ec. B.12}$$

La expresión de la temperatura en función de  $x$  y  $u(x)$  se define mediante:

$$u(\mathbf{e}) = \sum_n \mathbf{j}_n(\mathbf{e})u_n \quad \text{Ec. B.13}$$

$$x(\mathbf{e}) = \sum_n \mathbf{j}_n(\mathbf{e})x_n \quad \text{Ec. B.14}$$

donde la sumatoria se realiza sobre todos los nodos del elemento y el parámetro  $\mathbf{e}$  (coordenada del elemento) relaciona la temperatura  $u$  con la posición física.

$x(\mathbf{e})$  mapea entre el espacio matemático  $0 \leq \mathbf{e} \leq 1$  y el espacio físico  $x_1 \leq x \leq x_2$  como lo ilustra la figura 73.

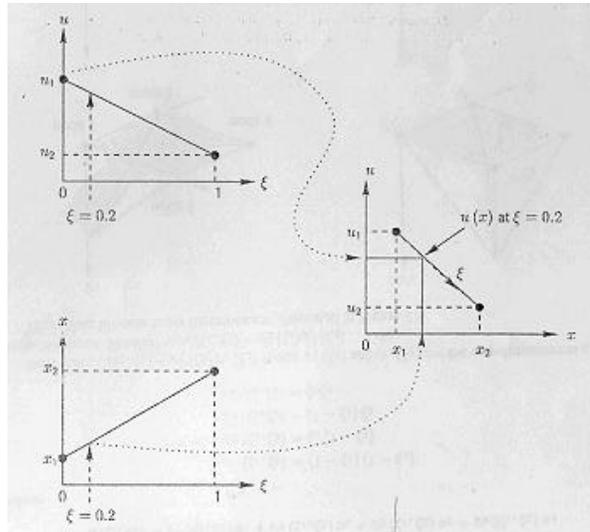


Figura 176 Mapeo de las funciones base

### Funciones base Cuadráticas

La propiedad esencial de las funciones base definidas anteriormente es que la función base asociada a un nodo particular al ser evaluada en dicho nodo toma el valor 1 y toma el valor 0 en cualquier otro nodo del elemento (para el caso de funciones base lineales).

Se pueden definir funciones base para interpolaciones de mayor orden.

Por ejemplo, una variación cuadrática de  $u$  sobre un elemento necesita como parámetro 3 nodos  $u_1, u_2$  y  $u_3$ .

$$u(\mathbf{e}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{e})u_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{e})u_2 + \mathbf{j}_3(\mathbf{e})u_3 \quad \text{Ec. B.15}$$

Ejemplos de funciones cuadráticas se muestran en la figura 74 junto a sus expresiones matemáticas.

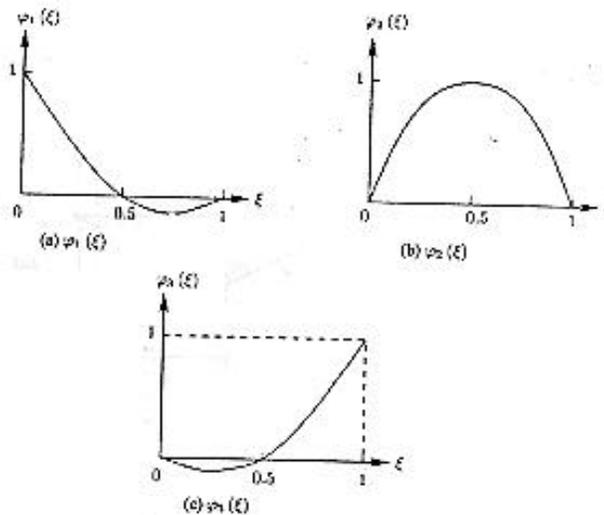


Figura 177 funciones base cuadráticas

Notar que dado que  $\mathbf{j}_1(\mathbf{e})$  debe ser 0 en  $\mathbf{e} = 0.5$  y  $\mathbf{e} = 1$  (nodo 2 y 3), entonces  $\mathbf{j}_1(\mathbf{e})$  contiene los factores  $(\mathbf{e} - 0.5)$  y  $(\mathbf{e} - 1)$  y como  $\mathbf{j}_1(\mathbf{e})$  debe ser 1 en  $\mathbf{e} = 0$  (nodo 1) entonces:

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{e}) = 2(\mathbf{e} - 0.5) y (\mathbf{e} - 1) \quad \text{Ec. B.16}$$

Elementos 2D y 3D

Las funciones base bilineales se construyen a partir del producto de las funciones base lineal anterior.

Por ejemplo para un elemento cuadrado:

$$u(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathbf{j}_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)u_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)u_2 + \mathbf{j}_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)u_3 + \mathbf{j}_4(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)u_4 \quad \text{Ec. B.17}$$

Donde las funciones base bilineales son las siguientes:

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (1 - \mathbf{e}_1)(1 - \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1(1 - \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{j}_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (1 - \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{j}_4(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$$

Ec. B.18

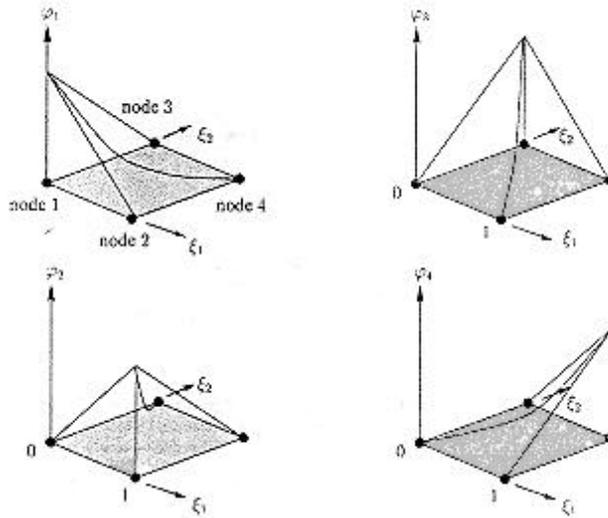


Figura 178 Funciones base para elementos cuadriláteros

Como en el caso anterior la geometría del elemento se define en términos de las posiciones del nodo  $(x_n, y_n)$  con  $n = 1,2,3,4$

$$x = \sum_n \mathbf{j}_n(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)x_n \quad \text{Ec. B.19}$$

$$y = \sum_n \mathbf{j}_n(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)y_n \quad \text{Ec. B.20}$$

Estas ecuaciones mapean el espacio matemático  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$   $0 \leq \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \leq 1$  con el espacio físico  $(x, y)$ .

Elementos triangulares

Los elementos triangulares no pueden utilizar las coordenadas  $e_1$  y  $e_2$  definidas anteriormente para los productos tensoriales. Las coordenadas naturales para los triángulos se basan en relaciones de áreas y son llamadas *Coordenadas de Área*.

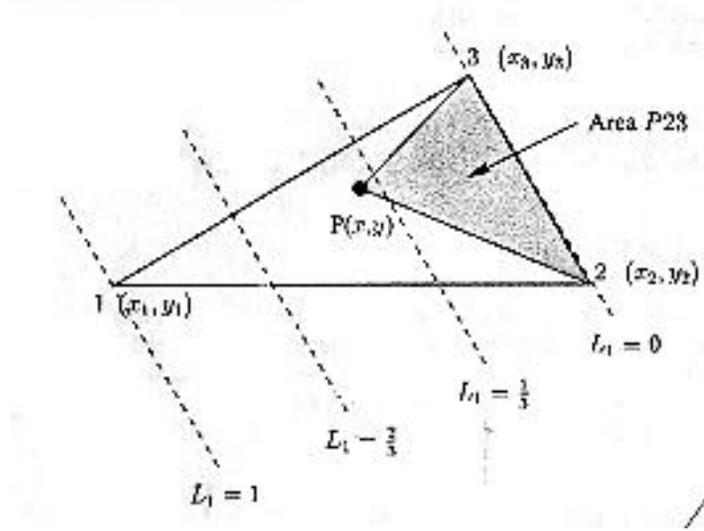


Figura 179 Coordenadas de Área

Como lo muestra la figura 76 la coordenada del punto P se define como:

$$L_1 = \frac{Area < P23 >}{Area < 123 >} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{(a_1 + b_1x + c_1y)}{2\Delta} \quad \text{Ec. B.21}$$

Notar que  $L_1$  es lineal en  $x$  e  $y$ .

Análogamente para los otros nodos:

$$L_2 = \frac{Area < P13 >}{Area < 123 >} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{(a_2 + b_2x + c_2y)}{2\Delta} \quad \text{Ec. B.22}$$

$$L_3 = \frac{Area < P12 >}{Area < 123 >} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{(a_3 + b_3x + c_3y)}{2\Delta} \quad \text{Ec. B.23}$$

Donde

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 & a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 & a_3 &= -x_1y_2 - x_2y_1 \\ b_1 &= y_2 - y_3 & b_2 &= -y_3 - y_1 & b_3 &= -y_1 - y_2 \end{aligned}$$

## IMPETOM I

$$c_1 = x_3 - x_2 \qquad c_2 = -x_1 - x_3 \qquad c_3 = -x_2 - x_1 \qquad \text{Ec. B.24}$$

La coordenada Área  $L_1$  varia linealmente desde  $L_1 = 0$  cuando el punto P coincide con el nodo 2 o el nodo 3, hasta  $L_1 = 1$  cuando P coincide con el nodo 1 por lo que puede utilizarse como la función base para el nodo 1 de un elemento triangular con 3 nodos. Por lo tanto, la interpolación lineal en un elemento triangular se puede expresar como:

$$u(x, y) = \mathbf{j}_1(x, y)u_1 + \mathbf{j}_2(x, y)u_2 + \mathbf{j}_3(x, y)u_3. \qquad \text{Ec. B.25}$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= L_1 \\ \mathbf{j}_2 &= L_2 \\ \mathbf{j}_3 &= L_3 = 1 - L_1 - L_2 \end{aligned} \qquad \text{Ec. B.26}$$

### **Ejemplo: Conducción del Calor en estado estacionario en una dimensión**

Como ejemplo de resolución de una ecuación diferencial mediante elementos finitos se resolverá la ecuación del calor en una barra en estado estacionario (análisis en una dimensión).

La ecuación B.27 surge de un simple balance de calor sobre una región del material conductor:

*la variación del flujo de calor = fuente de calor por unidad de volumen*

$$\frac{d}{dx}(\text{flujo de calor}) + \text{cantidad de calor por unidad de volumen} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(-k \frac{du}{dx}) + q(u, x) = 0 \qquad \text{Ec. B.27}$$

donde  $u$  es la temperatura,  $q(u, x)$  es el calor acumulado y  $k$  es la conductividad térmica ( $\text{Watts/m} / ^\circ \text{C}$ ).

Considerar el caso en que  $q = u$ .

$$\frac{d}{dx}(-k \frac{du}{dx}) + u = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad \text{Ec. B.28}$$

con las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(1) &= 1 \end{aligned} \qquad \text{Ec. B.29}$$

La ecuación B.28 para  $k = 1$  tiene la siguiente solución:

$$u(x) = \frac{e}{e^2 - 1} (e^x - e^{-x}) \qquad 0 < x < 1 \qquad \text{Ec. B.30}$$

Con la cual podemos comparar la solución aproximada por elementos finitos.

Como se puede ver en [23], para resolver la ecuación B.28 mediante el método de elementos finitos son necesarios los siguientes pasos:

- I. Plantear la expresión integral de la ecuación del calor.
- II. Integrar por partes (1D) o utilizar el Teorema de Green (2D o 3D) para reducir el orden de derivación.
- III. Introducir la aproximación de FEM para la Temperatura tomando como parámetros los nodos utilizando las funciones bases en los elementos.
- IV. Integrar sobre los elementos para calcular los elementos de la Matriz de Rigidez.
- V. Ensamblar las ecuaciones globales.
- VI. Aplicar las condiciones de borde.
- VII. Resolver las ecuaciones globales.
- VIII. Evaluar los flujos.

### Ecuación Integral

En lugar de resolver la ecuación B.28 directamente, plantearemos el residuo ponderado:

$$\int R w dx = 0 \quad \text{Ec. B.31}$$

Donde  $R$  es el residuo para una solución  $u$  aproximada:

$$R = -\frac{d}{dx} \left( k \frac{du}{dx} \right) + u \quad \text{Ec. B.32}$$

y  $w$  es una función de ponderación que se elegirá mas abajo.

Si  $u$  fuera una solución exacta en todo el dominio, el residuo  $R$  será 0 en todo el dominio. Pero dado que en problemas reales no sucede esto el objetivo es encontrar una solución aproximada  $u$  para la cual el residuo o el error se distribuyen sobre todo el dominio.

Sustituyendo la ecuación B.32 en la ecuación B.31:

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{d}{dx} \left( k \frac{du}{dx} \right) w + u w \right\} dx = 0 \quad \text{Ec. B.33}$$

Esta formulación de la ecuación del sistema puede ser interpretada como que se fuerza al residuo o error igualándolo a cero en promedio. Mas precisamente, se elige  $w$  de modo que el residuo sea ortogonal al espacio de funciones utilizado en la aproximación de  $u$ .

### Integración por partes

La mayor ventaja de la ecuación integral es que el orden de las derivadas dentro de la integral se puede reducir de dos a uno mediante la integración por partes (o de forma equivalente para el problema en 2D mediante el Teorema de Green).

Por lo tanto sustituyendo:

$$f = w \quad y \quad g = -k \frac{du}{dx} \quad \text{Ec. B.34}$$

Integración por partes:

$$\int_0^1 f \cdot \frac{dg}{dx} dx = [f \cdot g]_0^1 - \int_0^1 g \cdot \frac{df}{dx} dx \quad \text{Ec. B.35}$$

Entonces:

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left( -k \frac{du}{dx} \right) w dx = \left[ w \left( -k \frac{du}{dx} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \left( -k \frac{du}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} \right) dx \quad \text{Ec. B.36}$$

La ecuación B.33 se transforma en:

$$\int_0^1 \left( k \frac{du}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} + uw \right) dx = \left[ wk \frac{du}{dx} \right]_0^1 \quad \text{Ec. B.37}$$

### Aproximación por Elementos Finitos

Se divide el dominio  $0 < x < 1$  en 3 elementos de igual largo y se reemplaza el campo variable continuo  $u(x)$  dentro de cada elemento por la aproximación en elementos finitos:

$$u(\mathbf{e}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{e})u_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{e})u_2 = \mathbf{j}_n(\mathbf{e})u_n \quad \text{Ec. B.38}$$

$$x(\mathbf{e}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{e})x_1 + \mathbf{j}_2(\mathbf{e})x_2 = \mathbf{j}_n(\mathbf{e})x_n \quad \text{Ec. B.39}$$

Donde

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{e}) = 1 - \mathbf{e} \quad \text{Ec. B.40}$$

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \quad \text{Ec. B.41}$$

Son las funciones base lineales para  $u$  y  $x$ .

También se asume  $w = \mathbf{j}_m$  hipótesis de Galerkin. Esto fuerza el residuo  $R$  a ser ortogonal al espacio de las funciones utilizadas para representar la variable dependiente  $u$ , De esta forma se asegura que el residuo o error se reduzca monótonamente a medida que el tamaño de los elementos se reduce (refinamiento de la Grilla).

El dominio de integración de la ecuación B.37 se reemplaza por la suma de integrales tomados separadamente sobre los tres elementos:

$$\int_0^1 dx = \int_0^{1/3} dx + \int_{1/3}^{2/3} dx + \int_{2/3}^1 dx \quad \text{Ec. B.42}$$

y cada integral de cada elemento se toma sobre el espacio de  $\mathbf{e}$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_0^1 J \cdot d\mathbf{e} \quad \text{Ec. B.43}$$

Donde  $J = \left| \frac{dx}{d\mathbf{e}} \right|$  es el Jacobiano de la transformación de la coordenada  $x$  en la coordenada

**Calculo de las integrales por elemento**

Las integrales en los elementos surgen del miembro izquierdo de la ecuación B.37 y tienen la siguiente forma:

$$\int_0^1 (k \frac{du}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} + uw) J d\mathbf{e} \tag{Ec. B.44}$$

Donde  $u = \mathbf{j}_n u_n$  y  $w = \mathbf{j}_m$ .

Dado que tanto  $\mathbf{j}_m$  como  $\mathbf{j}_n$  son funciones de  $\mathbf{e}$  la derivada respecto de  $x$  debe ser transformada en una derivada respecto de  $\mathbf{e}$ , por lo que la ecuación B.44 toma la siguiente forma:

$$u_n \int_0^1 (k \frac{d\mathbf{j}_m}{d\mathbf{e}} \frac{d\mathbf{e}}{dx} \cdot \frac{d\mathbf{j}_n}{d\mathbf{e}} \frac{d\mathbf{e}}{dx} + \mathbf{j}_n \mathbf{j}_m) J d\mathbf{e} \tag{Ec. B.45}$$

Notar que  $u_n$  no depende de la variable  $\mathbf{e}$ .

El término  $\frac{d\mathbf{e}}{dx}$  se evalúa mediante la sustitución la aproximación por elementos finitos

$$x(\mathbf{e}) = \mathbf{j}_n X_n$$

En este caso  $x = \frac{1}{3}\mathbf{e}$  o  $\frac{d\mathbf{e}}{dx} = 3$  y el Jacobiano es  $J = \frac{dx}{d\mathbf{e}} = \frac{1}{3}$ .

El término multiplicador de los parámetros (nodos)  $u_n$  se denomina Matriz de Rigidez,

$$E_{mn}$$

$$E_{mn} = \int_0^1 (k \frac{d\mathbf{j}_m}{d\mathbf{e}} \frac{d\mathbf{e}}{dx} \cdot \frac{d\mathbf{j}_n}{d\mathbf{e}} \frac{d\mathbf{e}}{dx} + \mathbf{j}_n \mathbf{j}_m) J d\mathbf{e} = \int_0^1 (k \frac{d\mathbf{j}_m}{d\mathbf{e}} 3 \cdot \frac{d\mathbf{j}_n}{d\mathbf{e}} 3 + \mathbf{j}_n \mathbf{j}_m) \frac{1}{3} d\mathbf{e} \tag{Ec. B.46}$$

Donde los índices  $m$  y  $n$  son 1 o 2.

Para evaluar  $E_{mn}$  se sustituye las funciones base:

$$\mathbf{j}_1(\mathbf{e}) = 1 - \mathbf{e} \quad \text{o} \quad \frac{d\mathbf{j}_1}{d\mathbf{e}} = -1 \tag{Ec. B.47}$$

$$\mathbf{j}_2(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \quad \text{o} \quad \frac{d\mathbf{j}_2}{d\mathbf{e}} = +1 \tag{Ec. B.48}$$

Por lo tanto:

$$E_{11} = \frac{1}{3} \int_0^1 (9k (\frac{d\mathbf{j}_1}{d\mathbf{e}})^2 + (\mathbf{j}_1)^2) d\mathbf{e} = \frac{1}{3} \int_0^1 (9k(-1)^2 + (1 - \mathbf{e})^2) d\mathbf{e} = \frac{1}{3} (9k + \frac{1}{3}) \tag{Ec. B.49}$$

De la misma forma:

$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{3}(-9k + \frac{1}{6}) \quad \text{Ec. B.50}$$

$$E_{22} = \frac{1}{3}(9k + \frac{1}{3}) \quad \text{Ec. B.51}$$

Entonces:

$$E_{mn} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(9k + \frac{1}{3}) & \frac{1}{3}(-9k + \frac{1}{6}) \\ \frac{1}{3}(-9k + \frac{1}{6}) & \frac{1}{3}(9k + \frac{1}{3}) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. B.52}$$

Notar que la Matriz de Rigidez por elemento es simétrica, también notar que para este caso en particular es la misma para todos los elementos.

Para simplificar los cálculos, tomaremos  $k = 1$  de ahora en adelante.

### Ensamblado

Las tres matrices de rigidez (para  $k=1$ ) se ensamblan en una Matriz de Rigidez Global.

Este proceso se muestra en la siguiente figura donde las columnas 1..4 de la matriz de rigidez global son generalizaciones de las funciones base asociadas a los nodos 1..4:

Notar que como cada matriz de rigidez se solapa con su vecina dado que comparten un nodo global común.

Ensamblando llegamos a:

$$\begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. B.53}$$

Notar que la primer columna (generadora del flujo de calor del nodo1) contiene ceros multiplicando  $U_3$  y  $U_4$  debido a que los nodos 3 y 4 no tienen conexión directa a través de las funciones base con el nodo 1.

Las matrices de elementos finitos siempre son *sparses* (matrices con muchos ceros) dado que las funciones base son locales a los elementos.

La parte derecha de la ecuación B.37 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left[ k \frac{du}{dx} w \right]_{x=0}^{x=1} = \left( k \frac{du}{dx} w \right) \Big|_{x=1} - \left( k \frac{du}{dx} w \right) \Big|_{x=0} \quad \text{Ec. B.54}$$

para evaluar estas expresiones considerar las funciones de peso  $w$  correspondiente a cada nodo global. Para el nodo 1  $w_1$  se obtiene a partir de la función base  $J_1$  asociada al primer

## IMPETOM I

nodo del primer elemento y por lo tanto  $w_1|_{x=0} = 1$ . También, dado que  $w_1=0$  fuera del elemento 1,  $w_1|_{x=1} = 0$ .

Por lo tanto la ecuación B.54 para el nodo 1 se reduce a:

$$\left[ k \frac{du}{dx} w_1 \right]_{x=0}^{x=1} = - \left( k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} \quad \text{flujo entrante al nodo 1} \quad \text{Ec. B.55}$$

analogamente:

$$\left[ k \frac{du}{dx} w_n \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \quad \text{nodos 2 y 3} \quad \text{Ec. B.56}$$

$$\text{y } \left[ k \frac{du}{dx} w_4 \right]_{x=0}^{x=1} = - \left( k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=1} \quad \text{flujo entrante al nodo 4} \quad \text{Ec. B.57}$$

Ensamblando estas ecuaciones globales llegamos a:

$$\begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left( k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ \left( k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=1} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. B.58}$$

$$Ku = f \quad \text{Ec. B.59}$$

Tomando las condiciones de borde de la ecuación B.29,  $u(0)=U_1=0$  y  $u(1)=U_4=1$ , queda determinado el sistema y sustituyendo:

$$U_2=0.2885$$

$$U_3=0.6098$$

También quedan determinados los flujos entrante y saliente:

$$\left( k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} = -0.8496$$

$$\left( k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=1} = 1.1357$$

### **Conclusiones**

Este método de cálculo de ecuaciones diferenciales es muy útil, y en cierta medida fácil de utilizar. En el problema de la resolución del problema directo se adaptó el método utilizando directamente las coordenadas globales sin pasar por la parametrización en coordenadas locales, de esa forma se simplificaron los cálculos como se detalla en el capítulo 9.

## Apéndice C Respuesta a perturbaciones simples

.

Se muestran a la izquierda la distribución de conductividad original (simulada) y a la derecha el resultado de la reconstrucción según el método correspondiente. Con “C” se representa la ubicación del centro de la perturbación y con “D” el diámetro de la misma. El diámetro de la región circular es uno.

Reconstrucciones simples utilizando el método de Matriz de Sensibilidad. En todos los casos el pico de la discontinuidad es de  $20 \text{ mScm}^{-1}$

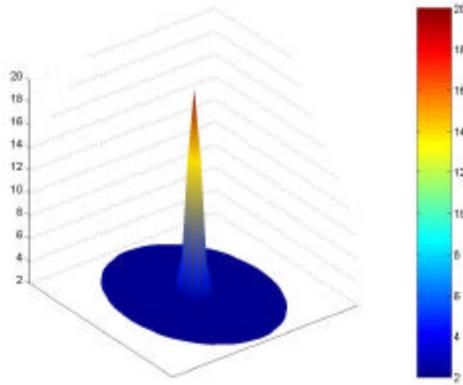


Figura 180 Original, C: 0.0 D: 0.1

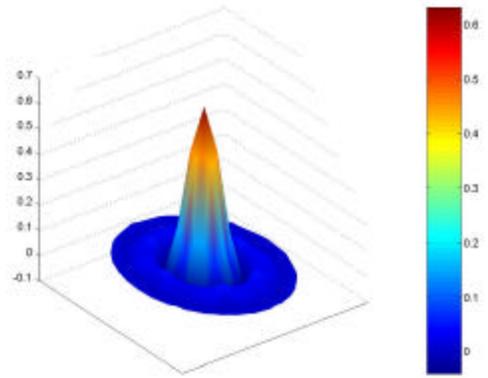


Figura 181 Reconstrucción

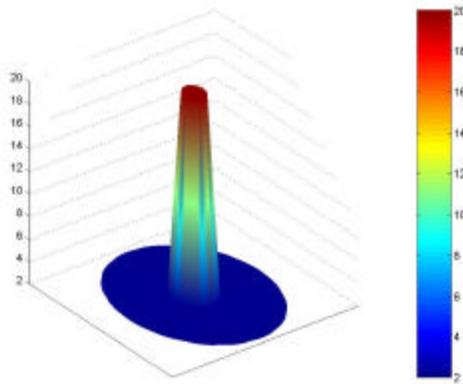


Figura 182 Original, C: 0.0 D: 0.2

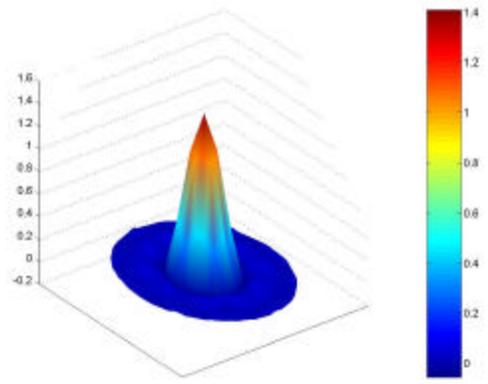


Figura 183 Reconstrucción

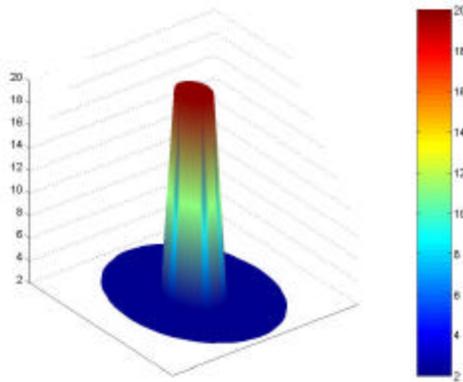


Figura 184 Original, C: 0.0 D: 0.3

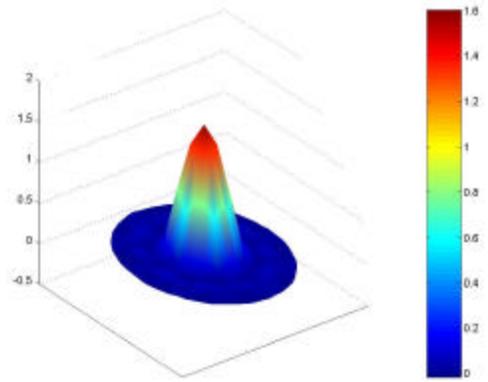


Figura 185 Reconstrucción

IMPETOM I

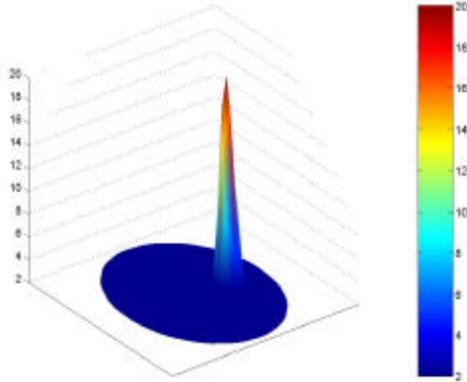


Figura 186 Original, C: 0.5 D: 0.1

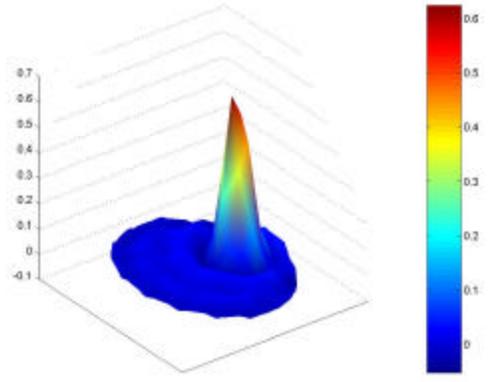


Figura 187 Reconstrucción

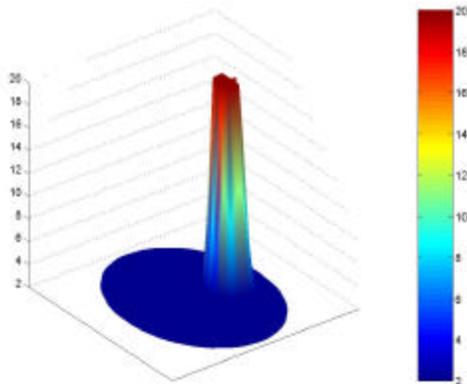


Figura 188 Original, C: 0.5 D: 0.2

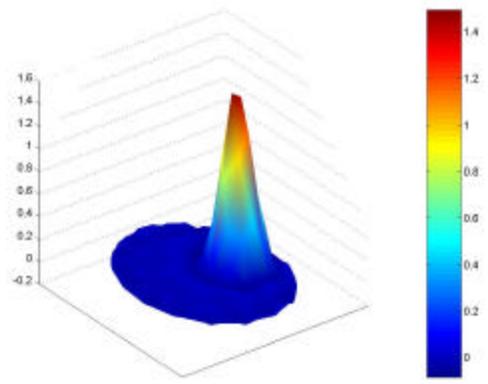


Figura 189 Reconstrucción

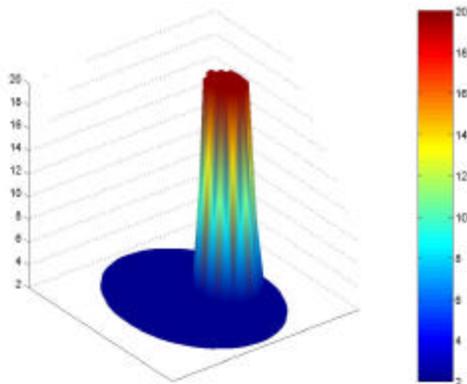


Figura 190 Original, C: 0.5 D: 0.3

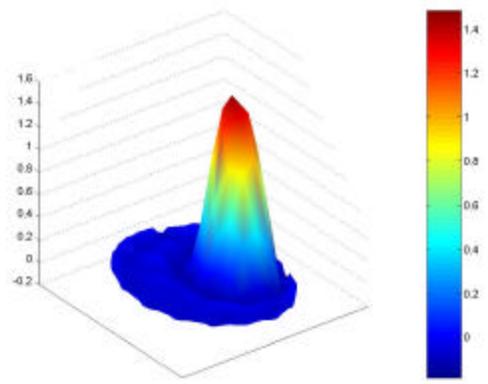


Figura 191 Reconstrucción

IMPETOM I

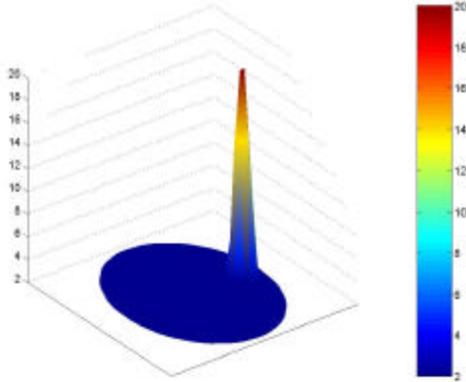


Figura 192 Original, C: 0.75 D: 0.1

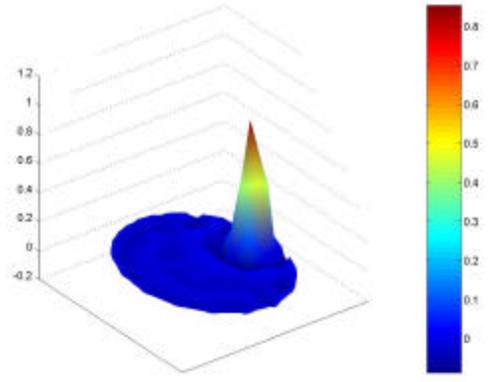


Figura 193 Reconstrucción

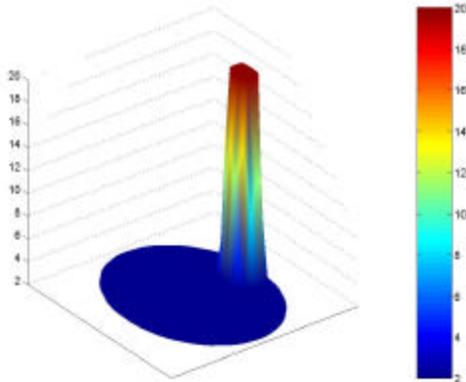


Figura 194 Original, C: 0.75 D: 0.2

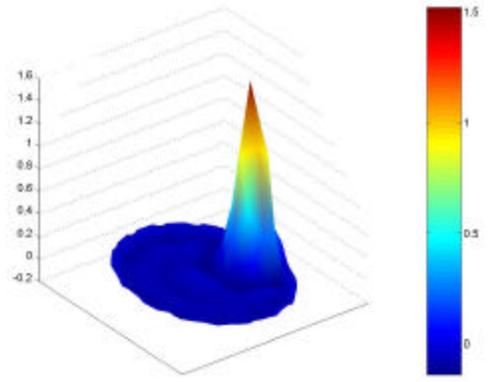


Figura 195 Reconstrucción

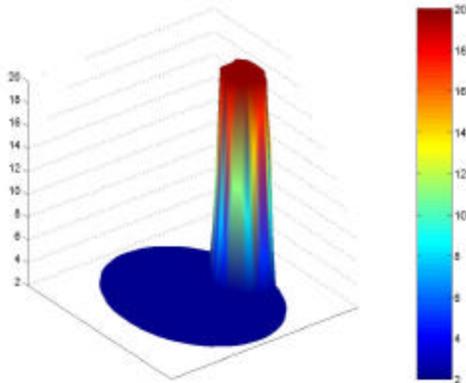


Figura 196 Original, C: 0.75 D: 0.3

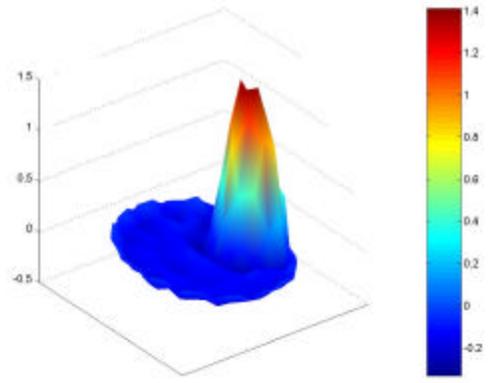


Figura 197 Reconstrucción

# IMPETOM I

- Reconstrucciones simples utilizando el método de Retroproyección. En todos los casos el pico de la discontinuidad es de  $20 \text{ mScm}^{-1}$ .

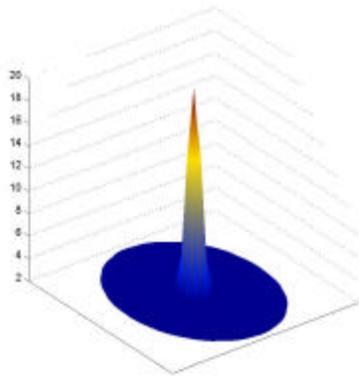


Figura 198 Original, C: 0.0 D: 0.1

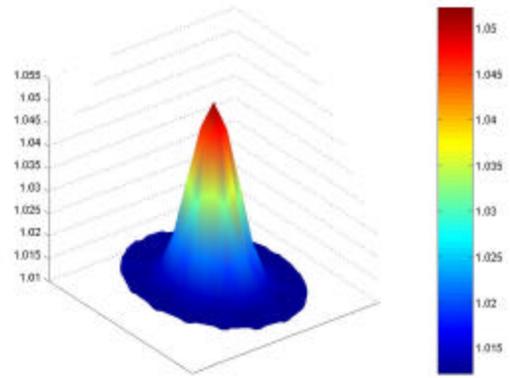


Figura 199 Reconstrucción

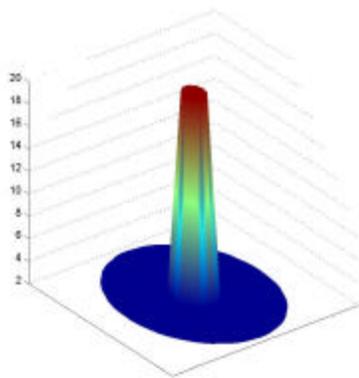


Figura 200 Original, C: 0.0 D: 0.2

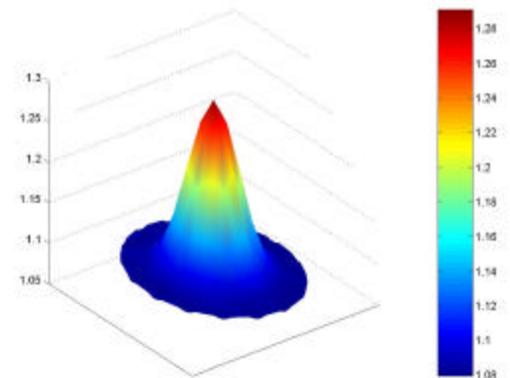


Figura 201 Reconstrucción

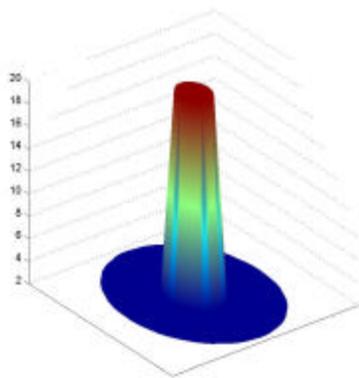


Figura 202 Original, C: 0.0 D: 0.3

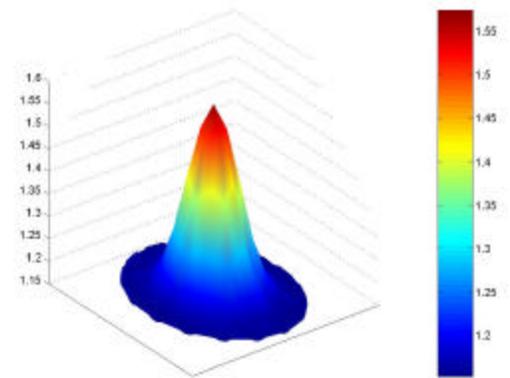


Figura 203 Reconstrucción

IMPETOM I

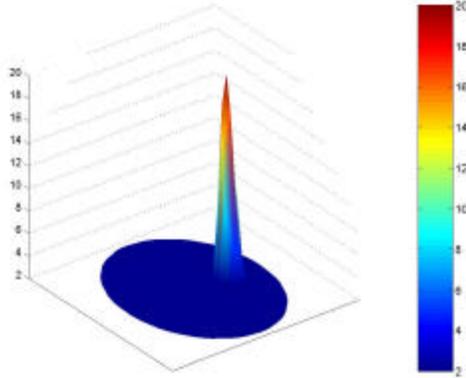


Figura 204 Original, C: 0.5 D: 0.1

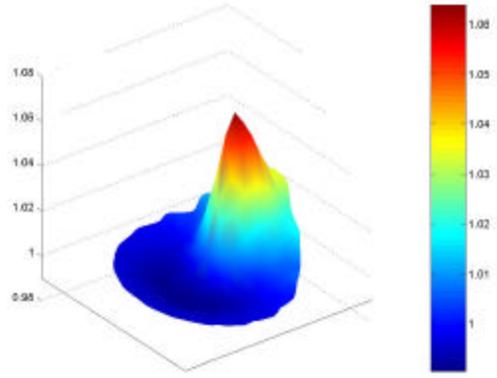


Figura 205 Reconstrucción

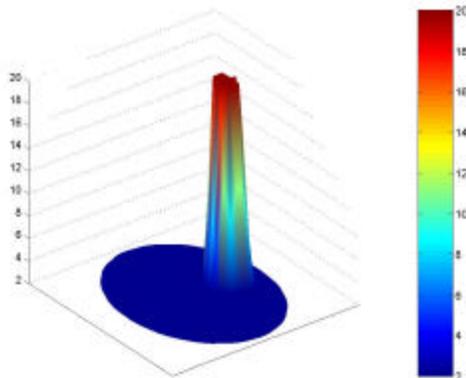


Figura 206 Original, C: 0.5 D: 0.2

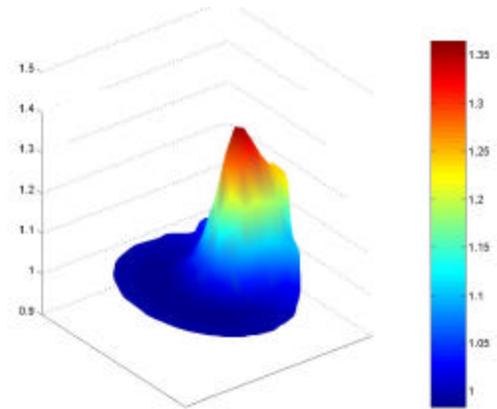


Figura 207 Reconstrucción

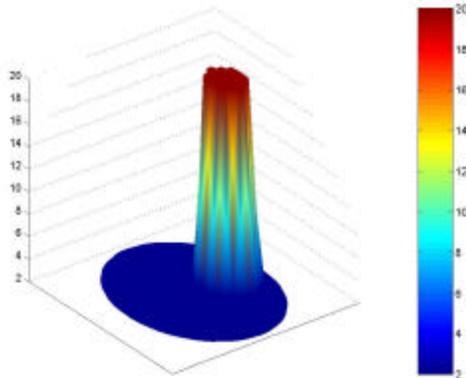


Figura 208 Original, C: 0.5 D: 0.3

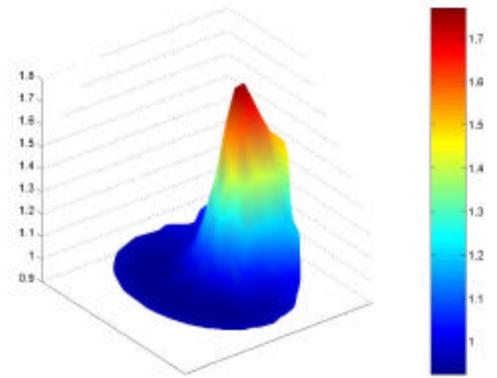


Figura 209 Reconstrucción

IMPETOM I

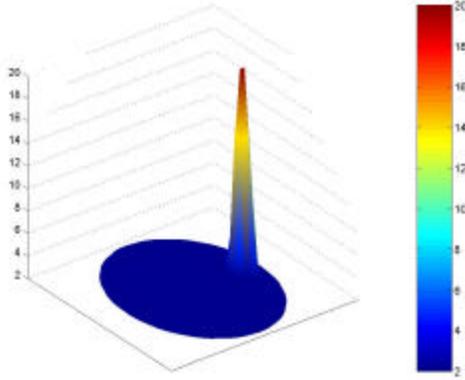


Figura 210 Original, C: 0.75 D: 0.1

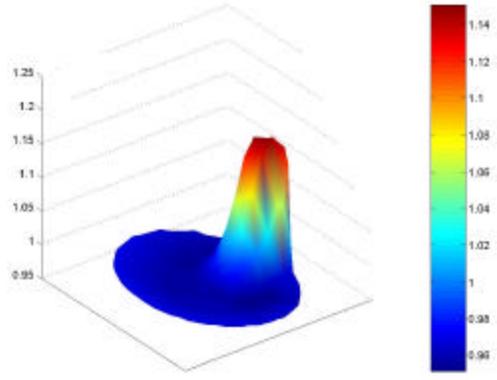


Figura 211 Reconstrucción

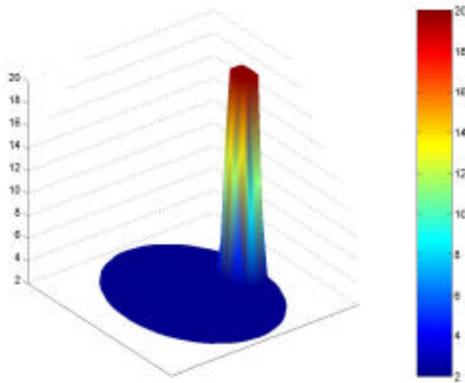


Figura 212 Original, C: 0.75 D: 0.2

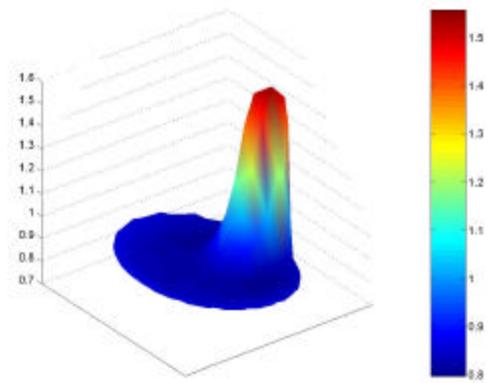


Figura 213 Reconstrucción

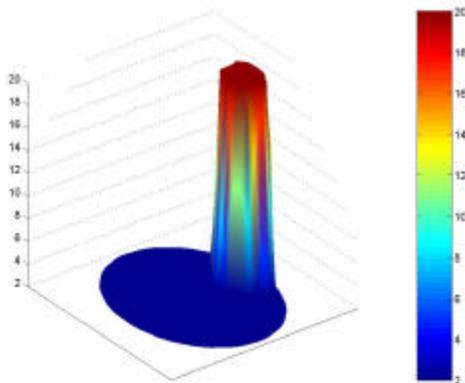


Figura 214 Original, C: 0.75 D: 0.3

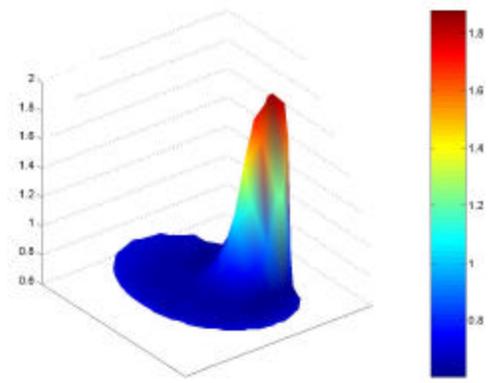


Figura 215 Reconstrucción

# IMPETOM I

- Reconstrucciones simples utilizando el método de Newton Raphson. En todos los casos el pico de la discontinuidad es de  $6 \text{ mScm}^{-1}$ .

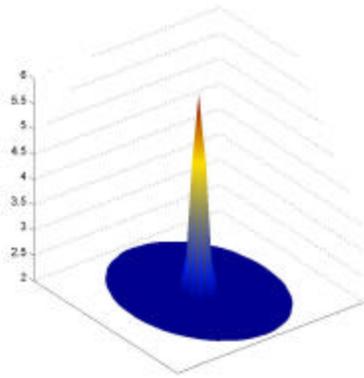


Figura 216 Original, C: 0.0 D: 0.1

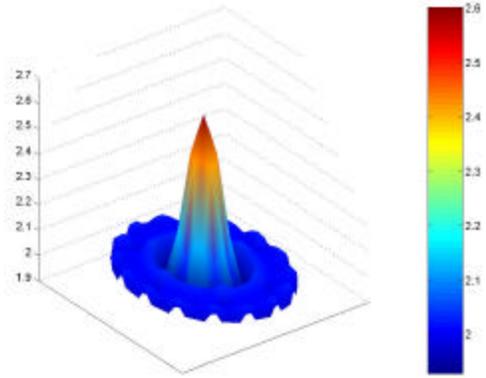


Figura 217 Reconstrucción

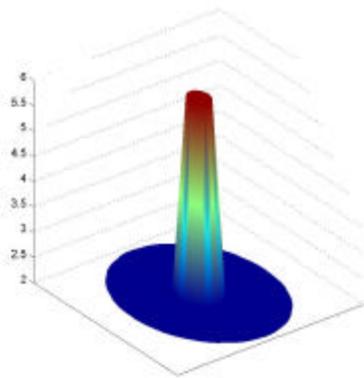


Figura 218 Original, C: 0.0 D: 0.2

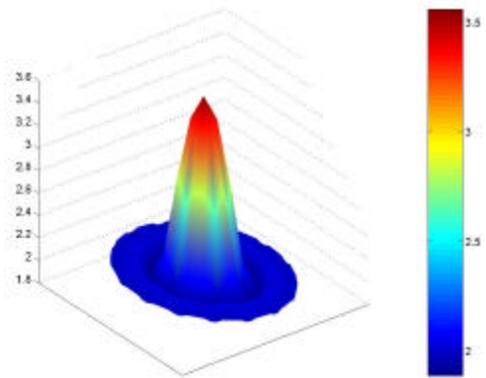


Figura 219 Reconstrucción

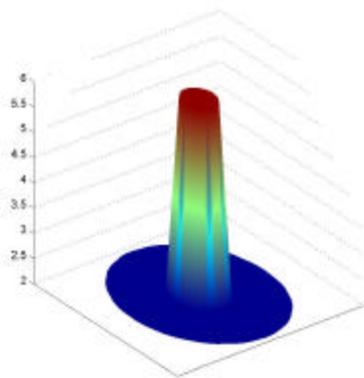


Figura 220 Original, C: 0.0 D: 0.3

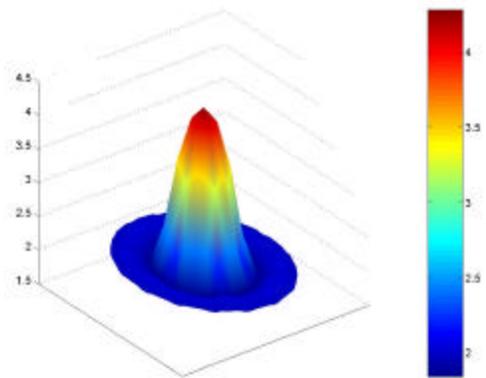


Figura 221 Reconstrucción

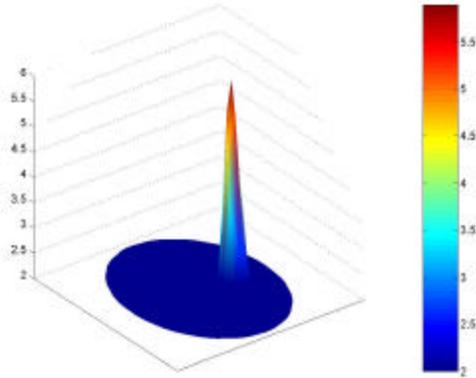


Figura 222 Original, C: 0.5 D: 0.1

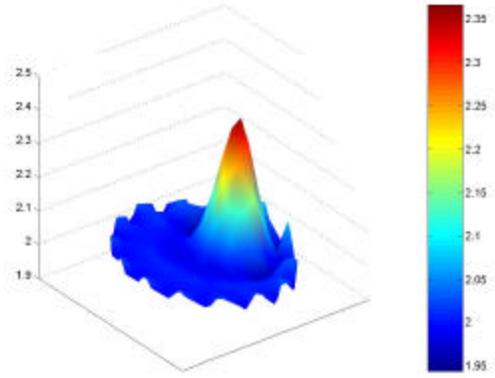


Figura 223 Reconstrucción

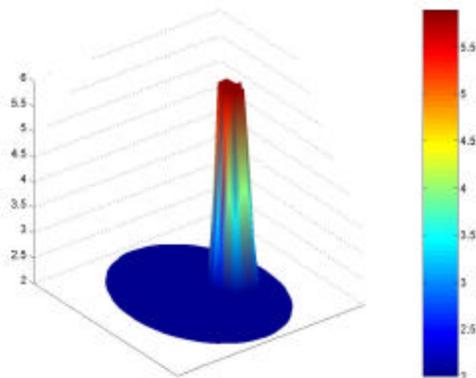


Figura 224 Original, C: 0.5 D: 0.2

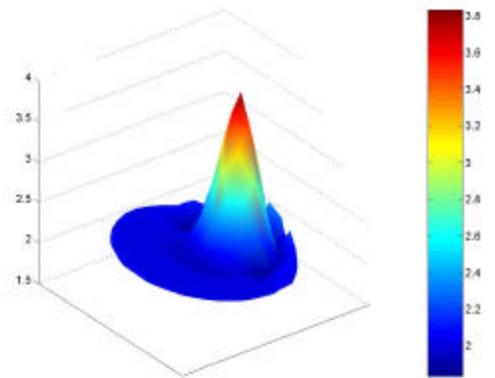


Figura 225 Reconstrucción

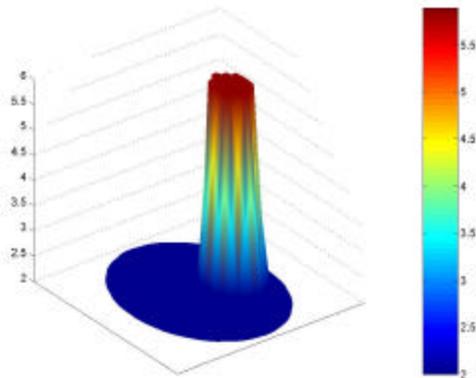


Figura 226 Original, C: 0.5 D: 0.3

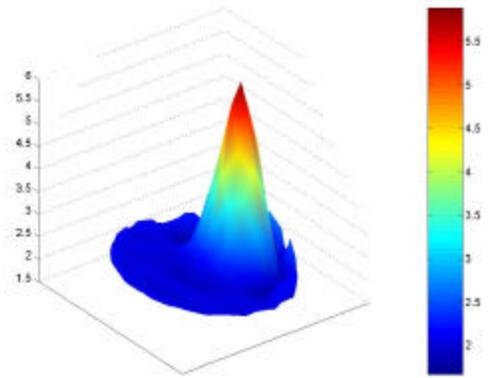


Figura 227 Reconstrucción

IMPETOM I

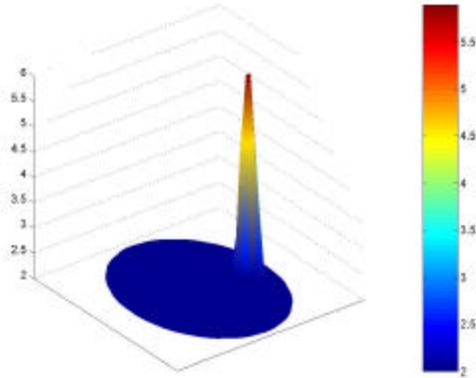


Figura 228 Original, C: 0.75 D: 0.1

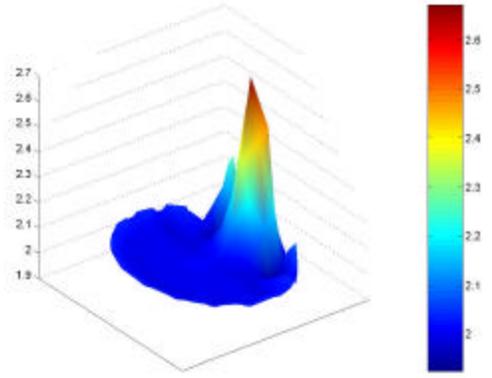


Figura 229 Reconstrucción

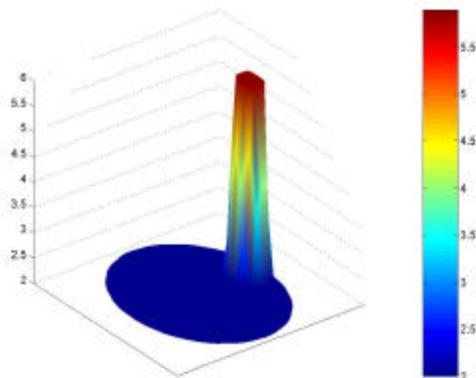


Figura 230 Original, C: 0.75 D: 0.2

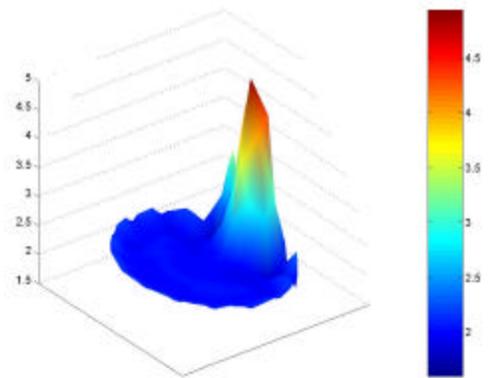


Figura 231 Reconstrucción

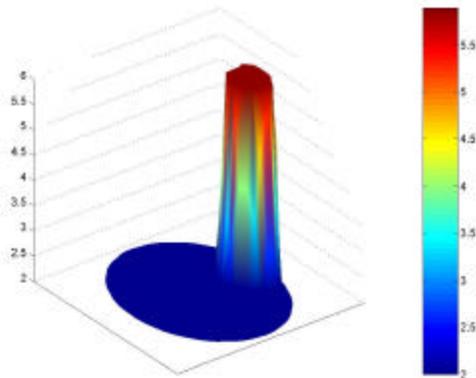


Figura 232 Original, C: 0.75 D: 0.3

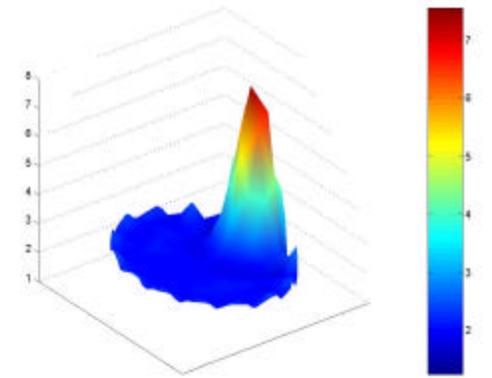


Figura 233 Reconstrucción

## Referencias

- [1] Peter Metherall, "Three Dimensional Electrical Impedance Tomography of the Human Thorax," a thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, Department of Medical Physics and Clinical Engineering, University of Sheffield 1998.
- [2] M. Cheney, D. Isaacson, J. C. Newel, "Electrical Impedance Tomography," SIAM Review, Vol 41, No. 1, pp. 85-101, 1998.
- [3] Marko Vauhkonen, "Electrical Impedance Tomography and prior information," Ph.D. thesis, Kuopio University publications, 1997.
- [4] K. Boone, D. Barber and B. Brown, "Imaging with electricity: Report of the European Concerted Action on Impedance Tomography," Journal of Medical Engineering & Technology, Vol 21, Number 6, PP. 201-232, 1997.
- [5] R. Guardo, C. Boulay, B. Murray and M. Bertrand, "An Experimental Study in Electrical Impedance Tomography using backprojection reconstruction," IEEE Trans. Biomed. Eng. Vol. 38, pp. 617-627, No. 7, 1991.
- [6] D. C. Barber and B.H. Brown, "Recent developments in applied potential tomography-APT," 9<sup>th</sup> International Conference Information Processing Medical Imaging, Washington, 1985.
- [7] C. López, "Repartido de mínimos cuadrados," CECAL, Facultad de Ingeniería, Universidad Mayor de la Republica, Uruguay, 1997.
- [8] P.C. Hansen, "Regularization tools, a Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems; version 2.0 for Matlab 4.0," tech. rep., Université Paris-Sud, Centre d'Orsay, France, 1993.
- [9] N. Polydorides, "First Report Year 1998," <http://skoda.ee.umist.ac.uk/nick/eit.htm>.
- [10] P. C. Hansen, "The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems," Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Denmark.
- [11] C. Cohen-Bacrie, Y. Goussard and R. Guardo, "Regularized reconstruction in Electrical Impedance Tomography using a variance uniformization constraint," IEEE Transaction on Medical Imaging, Vol. 16, No. 5, 1997.
- [12] Tang MengXing et al, "A new analytical method for the inverse problem In Electrical Impedance Tomography," Engineering in Medicine and Biology Society, Proceedings of the 20th Annual International Conference of the IEEE, Vol. 2, pp. 1055 –1057, 1998.
- [13] F. Kleinermann and N. J. Avis, "A comparison of voltage and sensitivity profiles from two forward problem solvers for three dimensional Electrical Impedance Tomography," 18th Annual International Conference of the IEEE, Vol. 2, pp. 798-799, 1997.

- [14] M. Eyüboğlu, "An interleaved drive EIT algorithm reconstruction image," Department of Electrical and Electronics Engineering, Hacettepe University, Ankara, Turkey, 1996.
- [15] F. Kleinermann and N. J. Avis, "Forward and inverse problem solutions for three dimensional Electrical Impedance Tomography," Advances in Electrical Tomography (Digest No: 1196/143), IEEE Colloquium, pp. 5/1 -5/3, 1996.
- [16] A. V. Korjenevsky, "Reconstruction of absolute conductivity distribution in E.I.T.," Proc. IX Int. Conf. Electrical Bio-Impedance (Heidelberg), Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Mokhovaya , Russia, 1995.
- [17] F. Santosa and M. Vogelius, "A Backprojection Algorithm for Electrical Impedance Tomography," SIAM J. Appl. Math. Vol 50 pp. 216-243, 1990.
- [18] M. A. Player, J. Van Weereld, A. R. Allen and D. Collie, "Truncated-Newton algorithm for three-dimensional EIT," Electronics Letters, Vol. 35, Issue 25, pp. 2189-2191, 1999.
- [19] P. M. Edic, D. Isaacson, G. J. Saulnier, H. Jain and J. C. Newell, "An iterative Newton-Raphson method to solve the inverse admittivity problem," IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Volume: 45, Issue: 7, pp. 899-908, 1998.
- [20] V. Kolehmainen, M. Vauhkonen, P.A. Karjalainen and J. P. Kaipio, "Spatial inhomogeneity and regularization in EIT," in Proc. 19<sup>th</sup> Int. Conf. IEEE Eng. Med. Biol. Society, pp. 449-452, Chicago, 1997.
- [21] E. Somersalo, M. Cheney and D. Isaacson, "Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography," Siam J. Appl. Math., Vol. 52, No 4, pp. 1023-1040, 1992.
- [22] Y. Z. Idert, B.M. Eyuboglu, M. Kuzuoglu, K. Leblebicioglu, U. Baysal, B. K. Caglar and O. Birglu, "A method for comparative evaluation of EIT algorithms using a standard data set," Physiol. Meas., Vol. 16, pp. A227-A236, 1995.
- [23] P. Hunter and A. Pullan, "FEM/BEM Notes", Department of Engineering Science, The University of Auckland, New Zealand, 2001.
- [24] G. J. Saulnier, R. S. Blue, J. C. Newell, D. Isaacson and P. M Edic, "Electrical Impedance Tomography", IEEE signal processing magazine, pp. 31-43 November 2001
- [25] Jan C. de Munck, Theo J. C. Faes, and Rob M. Heethar, "The boundary element method in the forward and inverse problem of Electrical Impedance Tomography", IEEE trans. On Biomedical engineering, Vol 47, No 6, jun 2000
- [26] A. V. Korzhenevskii, V. N. Kornienko, M. Yu. Kul'tiasov, Yu. S. Kul'tiasov and V. A. Cherepenin, "Electrical Impedance Computerized Tomograph for medical applications", Instruments and experimental techniques, vol 40, No 3, pp. 415-421, 1997.

- [27] B. Murat Eyüboğlu, “An interleaved drive electrical impedance tomography image reconstruction algorithm”, *Physiol. Meas.* Vol 17 A59-A71, 1996
- [28] D. C. Barber, B. H. Brown and N. J. Avis, “Image reconstruction in electrical impedance tomography using filtered backprojection”, *Engineering in Medicine and Biology Society*, 1992. Vol.14., Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE , Volume: 5, pp: 1691 –1692
- [29] Robert W. M. Smith, Ian Leslie Freeston and B. H. Brown, “A real time electrical impedance tomography system for clinical use. Design and preliminary results” *IEEE trans. On Biomedical Engineering*, Vol 42, No. 2, pp:133-139, Feb-1995
- [30] W. R. Breckon “Image reconstruction in Electrical Impedance Tomography” PhD thesis, School of Computing and Mathematical Sciences Oxford Polytechnic, may-1990
- [31] V. Kolehmainen, M. Vauhkonen, P. A. Karjalainen and J. P. Kaipio, “Spatial inhomogeneity and regularization in EIT” Dept. of applied physics. University of Kuopio, Finland  
<http://www.venda.uku.fi>
- [32] Valeria de Magalhaes Iório, EDP Um curso de graduacao. Colecao matemática universitaria, Instituto de Matemática pura e aplicada. 1991
- [33] P. C. Hansen “Analysis of discrete ill posed problems by means of L-curve”, *SIAM Review*, Vol. 34, pp 561-580, December 1992
- [34] A. W. Moore and Mary S. Lee “Efficient Algorithm for minimizing cross validation error”, School of computer science, Carnegie Mellon University  
<http://www.cs.cmu.edu>
- [35] M. Vauhkonen, P.A. Karjalainen, J. P. Kaipio, D. Vadász and E. Somersalo “Tikhonov regularization and prior information in Electrical Impedance Tomography”, *IEEE trans. On Medical Imaging* Vol. 17, No.2, April-1998
- [36] Gene H. Golub, Per Hansen and Dianne P. O’Leary, “Tikhonov regularization and total least squares” *SIAM J. on Matrix Analysis and Applications*, Vol 21, No. 1, pp: 185-194, 2000
- [37] Päivi J. Vauhkonen, Marko Vauhkonen, Tuomo Savolainen and Jari P. Kaipio “Three dimensional Electrical Impedance Tomography based on the complete electrode model”, *IEEE trans. On Biomedical Engineering* Vol 46, No. 9, set 1999
- [38] Sergei Semenov *et al.* ”2D approach for reconstruction in Electrical Impedance Tomography” 18<sup>th</sup> annual international conference of the IEEE engineering in medicine and biology society, Amsterdam 1996
- [39] Dianne P O’Leary “Near optimal parameters for Tikhonov and other regularizations methods” Department Informatik, ETH Zurich, Switzerland, 1998

## IMPETOM I

- [40] A. Adler, R. Guardo, Y. Berthiaume and R. Amyot, “Imaging of pulmonary edema with Electrical Impedance Tomography” Ecole Polytechnique, Montreal, Canada- 1995
- [41] L. Rao, R. He, Y Wang, W. Yan, J. Bai and D. Ye “An efficient improvement of modified Newton Raphson algorithm for Electrical Impedance Tomography”, IEEE trans. On Magnetics, Vol 35, No. 3, may-1999
- [42] I. Frerichs, G. Hahn and G. Hellige, “Thoracic Electrical Impedance Tomography measurements during volume controlled ventilation. Effects of tidal volume and positive end – expiratory pressure” IEEE trans. On Medical Imaging, Vol 18, No. 9, pp: 764-773, set 1999
- [43] I. Frerichs, “Electrical Impedance Tomography in applications related to lung and ventilation: a review of experimental and clinical activities” Physiol. Meas. Vol 21, R1-R21, 2000
- [44] A. Adler and R. Guardo, “Electrical Impedance Tomography: Regularized imaging and contrast detection” IEEE trans. On Medical Imaging, Vol 15, No 2, pp: 170-179, April-1996
- [45] K. Paulson, W. Breckon and M. Pidcock, “Electrode modeling in Electrical Impedance Tomography” SIAM, J. appl. Math. Vol 52, No 4, pp:1012-1022, August 1992
- [46] Gene H. Golub and C. Van Loan, “Matrix computations”, Johns Hopkins Univ Pr; ISBN: 0801854148; 3rd edition, December 1996
- [47] Z. Liang and P. C. Lauterburg, “Principles of Magnetic Resonance Imaging”, IEEE press; ISBN 0/7083-4723-4; 1<sup>st</sup> edition, 2000