

Modelado Cardiovascular reciente: Análisis con técnicas de líneas de transmisión

Ianai Urwicz, iurwicz@ipcomsa.com.uy

Docentes: Franco Simini, Jorge Lobo, Daniel Geido

Monografía vinculada a la conferencia del Prof. Dr. Ing. Ricardo Armentano (Universidad de Favaloro, Bs. As) sobre “modelado en Ingeniería cardiovascular” del 9 de mayo 2006.

Resumen—El siguiente trabajo tiene como finalidad profundizar en algunos conceptos relacionados con el modelado cardiovascular, además de permitirle al lector apreciar las grandes aplicaciones prácticas de este modelo en el área de la medicina preventiva.

Palabras claves— Sistema (o aparato) Cardiovascular, Aorta, arterias, ventrículo (izquierdo y derecho), venas, onda reflejada, coeficiente de reflexión, conformidad aparente.

I. INTRODUCCIÓN

EL sistema o aparato cardiovascular es el conjunto de conductos por los que circula la sangre y está formado por: el corazón y los vasos sanguíneos. Si bien es común la denominación de "sistema" cardiovascular, estrictamente se le debería llamar "aparato". La denominación de "sistema" se reserva para un conjunto de órganos formados predominantemente por el mismo tipo de tejido (quizá el ejemplo más claro es el sistema nervioso). El aparato cardiovascular está formado por diferentes tipos de tejidos, y por ello ésta es la denominación más adecuada. El **sistema circulatorio** es la suma del sistema cardiovascular o circulación sanguínea más el sistema linfático.

La circulación sanguínea realiza dos circuitos a partir del corazón:

Circulación mayor o circulación somática o sistémica: El recorrido de la sangre comienza en el ventrículo izquierdo del corazón, cargada de oxígeno, y se extiende por la aorta y sus ramas arteriales hasta el sistema capilar, donde se forman las venas que contienen sangre pobre en oxígeno. Estas desembocan en las dos venas cavas (superior e inferior) que drenan en la aurícula derecha del corazón.

Circulación menor o circulación pulmonar o central: La sangre pobre en oxígeno parte desde el ventrículo derecho del corazón por la arteria pulmonar que se bifurca en sendos troncos para cada uno de ambos pulmones. En los capilares alveolares pulmonares la sangre se oxigena a través de un proceso conocido como hematosis y se reconduce por las cuatro venas pulmonares que drenan la sangre rica en oxígeno, en la aurícula izquierda del corazón.

La **aorta** es la principal arteria del cuerpo. Sale directamente del corazón, concretamente del ventrículo izquierdo, y da origen a todas las arterias del sistema circulatorio (excepto a las arterias pulmonares, que salen del ventrículo derecho). Su porción central o proximal se conoce con el nombre de **arco o cayado aórtico**. En la figura 1 vemos un esquema del mismo (en color rojo).

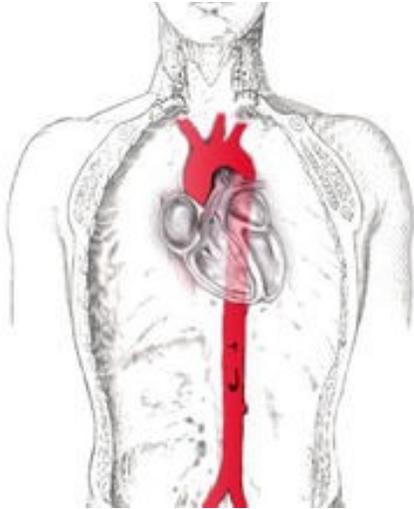


Fig. 1. Esquema del ventrículo izquierdo y la aorta. [7]

Por otro lado tenemos las **venas**; son vasos sanguíneos que conducen la sangre desde los capilares al corazón. El cuerpo humano tiene más venas que arterias y su localización exacta es mucho más variable de persona a persona que el de las arterias.

II. ACTUALIDAD DEL MODELO CARDIOVASCULAR

El estudio de las ondas de presión y flujo a lo largo de las arterias, ha sido un centro de atención en la última década. La predicción de un modelo matemático es de gran interés para muchas ramas de la medicina, ya que posibilitará la prevención y diagnóstico de problemas patológicos del sistema cardiovascular.

En los últimos años se ha desarrollado una nueva función de transferencia que unificó las discrepancias existentes entre las dos escuelas que competían por el modelo arterial.

En la escuela de "líneas de transmisión" el sistema arterial es modelado usando constantes distribuidas. Se utilizan los conceptos de impedancia vista, impedancia característica y coeficientes de reflexión, que veremos más adelante.

Por otra parte la escuela de "lumped" basa su atención en el circuito de Windkesel, es decir un modelo de parámetros concentrados. [1] [3]

III. LINEAS DE TRANSMISIÓN, MODELO MATEMÁTICO.

Como vimos anteriormente podemos modelar el aparato cardiovascular basándonos en los conceptos básicos de líneas de transmisión. Por lo tanto desarrollaremos los parámetros más importantes de las líneas y luego veremos su analogía con el aparato cardiovascular.

Trabajando con las ecuaciones de Maxwell, y considerando la hipótesis adicional de que nos encontramos frente a circuitos de parámetros concentrados, podemos modelar un trozo de línea como lo muestra la figura 2:

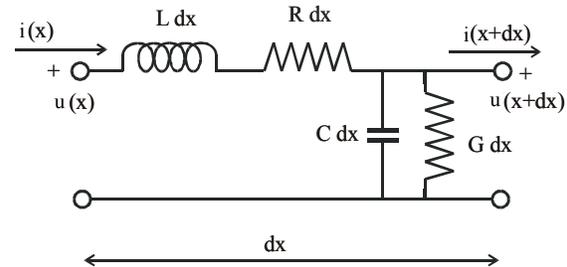


Fig. 2: Trozo de línea de transmisión (aparece el concepto de parámetros distribuidos). [6]

Aplicando las ecuaciones de Kirchhoff al circuito de la figura, para evaluar la caída de tensión a lo largo de la línea y la derivación de la corriente en el sentido transversal:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = Ri(x,t) + L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = Gu(x,t) + C \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Trabajando en régimen sinusoidal (podemos usar notación fasorial), si derivamos la primera ecuación y sustituimos la siguiente, obtenemos ecuación diferencial de ondas para la tensión:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)u \quad \text{Si definimos}$$

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C)$$

$$\gamma = (\alpha + j\beta) = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \gamma^2 u$$

Similar ecuación podemos plantear para la corriente:

$$\frac{d^2 i}{dx^2} = \gamma^2 i$$

Luego, sin escribir la dependencia armónica del tiempo $e^{j\omega t}$, las soluciones de dichas ecuaciones diferenciales vienen dadas por :

$$\begin{aligned} u(x) &= A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} \\ i(x) &= \frac{-A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}}{Z_0} \end{aligned}$$

Las constantes A_1 y A_2 se calculan conociendo la tensión y corriente en algún punto de la línea o la impedancia que se conecta en el extremo. Veremos más adelante que existe una perfecta analogía entre la tensión en un punto de la línea con la presión en la arteria, y entre la corriente y el flujo.

Z_0 es llamada **impedancia característica**, es el parámetro eléctrico más importante en la caracterización de la línea y como lo dice su nombre queda definido por las características (R,G,C,L) de la línea:

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Relaciones de impedancia

A partir de las ecuaciones halladas para u, i definimos la impedancia en un punto de la línea como la relación entre el voltaje y la corriente, esto es $Z(z)=u/i$. Simplemente realizamos un cambio de variable ($z=-x$).

Operando obtenemos que:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_R + Z_0 \tanh \gamma z}{Z_0 + Z_R \tanh \gamma z}$$

Donde Z_R es la impedancia de carga del sistema. En el caso de una línea sin pérdidas ($\gamma = j\beta$):

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_R + jZ_0 \operatorname{tg} \beta z}{Z_0 + jZ_R \operatorname{tg} \beta z}$$

Existen casos particulares de impedancia vista, para determinadas longitudes de línea que solamente mencionaremos:

a) longitud de la línea $z=\lambda/4 \rightarrow Z_V=Z_0^2/Z_R$

b) longitud de la línea $z=\lambda/2 \rightarrow Z_V=Z_R$

c) Si $Z_R=Z_0 \rightarrow Z_V=Z_0$ (siempre se ve la misma impedancia, en cualquier punto de la línea, se dice que la **línea esta adaptada**).

Veremos que el concepto de impedancia vista, es similar al modelar la pared arterial, y al igual que aquí, depende de las características en este punto y del resto de la arteria.

Coefficiente de reflexión de voltaje

Se define el coeficiente de reflexión de la siguiente forma:

$$\Gamma = \frac{\text{Valor}_{\text{onda}_{\text{reflejada}}}}{\text{Valor}_{\text{onda}_{\text{incidente}}}}$$

Por lo tanto, podemos hallar una relación entre el coeficiente de reflexión en un punto de la línea (Γ) y la impedancia en este punto de línea ($Z(z)$).

Existe una herramienta llamada diagrama de smith que permite, en base a una de éstas variables, obtener la otra.

Relación de onda estacionaria

Se pueden escribir en régimen sinusoidal, sin tener en cuenta el término $e^{j\omega t}$ las ecuaciones de la línea como una onda hacia la carga U^+ y hacia el generador U^-

$$U = U^+ e^{\gamma z} + U^- e^{-\gamma z}$$

$$I = \frac{U^+}{Z_0} e^{\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

Las ondas que se reflejan interfieren con las que viajan a la carga y generan ondas estacionarias en función de z.

Se define como relación de onda estacionaria al coeficiente

$$r = \text{ROE} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|U^+| + |U^-|}{|U^+| - |U^-|}$$

Y por lo tanto obtenemos también una relación entre ROE y el coeficiente de reflexión:

$$r = \frac{1 + |\Gamma_R|}{1 - |\Gamma_R|}$$

Conclusión: El objetivo de las líneas de transmisión es adaptar impedancias, esto quiere decir evitar que exista onda reflejada ($\Gamma=0 \rightarrow r=1$ y $Z_v=Z_o$ para cualquier punto de la línea).

Si la línea esta adaptada, no existe potencia reflejada, por lo que se maximiza la transmisión de potencia desde la fuente a la carga.

Veremos que en el caso del sistema cardiovascular el objetivo es justamente el contrario, tener desadaptación, de forma que el ventrículo (análogo a la fuente) pueda realizar la circulación sistémica. Pero dicha desadaptación no puede ser mucha, ya que provocaría una posible hipertensión.

IV. MODELO CARDIOVASCULAR

Luego de haber analizado algunos conceptos básicos para entender el funcionamiento de las líneas de transmisión, veamos las distintas componentes que forman el sistema cardiovascular. En particular analizaremos la circulación sistémica.

Ventrículo:

Comenzamos por el ventrículo izquierdo, el cual podríamos pensar como la fuente de alimentación del sistema.

La fuente (ventrículo) queda totalmente caracterizada si conociéramos la presión durante un ciclo (sístole-diástole) y su volumen durante el ciclo. El área encerrada por estos dos parámetros nos da la potencia transmitida por la fuente (W_v) tal cual se muestra en la figura 3:

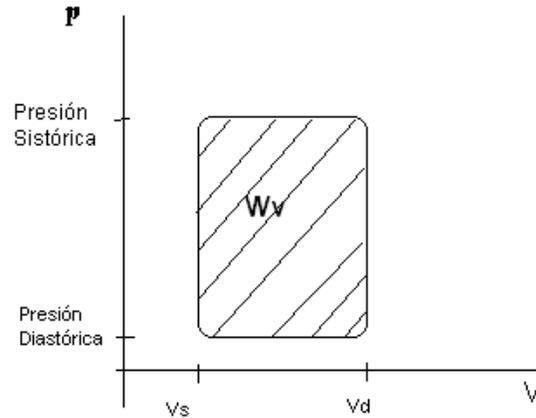


Fig. 3: gráfico de Presión vs. Volumen del ventrículo. [4]

Para calcular el volumen del ventrículo en tiempo real se usan métodos de reflexión óptica para hallar los distintos diámetros del mismo. Esto obviamente requiere una intervención quirúrgica importante en el paciente.

Un factor muy importante de conocer es la presión sistólica. Este valor es determinante en pacientes de alto riesgo, es un parámetro que determina la orientación que debe seguir el tratamiento.

Pared arterial:

Ahora es el turno de modelar la pared arterial, quizás el punto más complejo del trabajo, por la compleja estructura de la pared arterial compuesta principalmente por elastina, colágeno y músculo liso vascular.

Como vimos anteriormente la conformidad (compliance) aparente fue el factor que unió ambos modelos, el que se basa en circuitos distribuidos y el que se basa en el modelo de Windkesel.

Se define la C_{app} como la relación entre el volumen guardado (V) y la presión de entrada (P_{in}):

$$C_{app}(w) = V(w) / P_{in}(w)$$

Además se define la resistencia aparente como:

$R_{app}(w) = P_{in}(w) / Q_o(w)$ donde Q_o representa el flujo de salida, y considerando la presión de las venas despreciable.

Expresamos por lo tanto C_{app} en términos de R_{app} y de impedancia de entrada $Z_{in}(w) = P_{in}(w) / Q_{in}(w)$, tenemos que:

$$C_{app}(w) = \frac{V(w)}{P_{in}(w)} = \frac{R_{app} - Z_{in}}{jw \cdot R_{app} \cdot Z_{in}} \quad (1)$$

La variación de C_{app} con la frecuencia se muestra en la figura 4

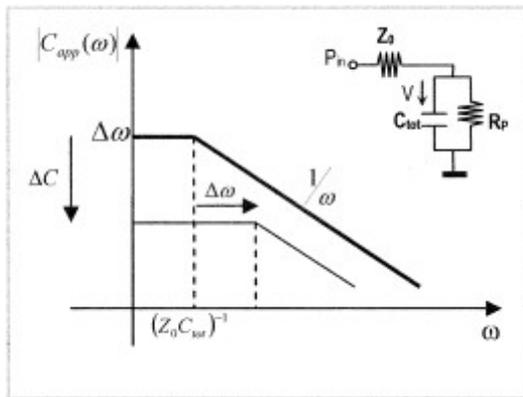


Fig. 4: Respuesta en frecuencia de Conformidad aparente. [1]

En los últimos años se ha usado el concepto de conformidad aparente para analizar la reflexión de una onda con forma de pulso.

El módulo de C_{app} se divide en dos partes:

1) Las bajas frecuencias (por debajo de la frecuencia de corte f_c) representan la zona de “windkessel”, es una constante que resume la compliance total del sistema C_{tot} . Desde el punto de vista eléctrico es clara la predominancia de R_p en el paralelo de impedancias.

2) Por encima del valor f_c (donde la reflexión es despreciable) la respuesta es dominada por la compliance característica C_0 , atenuándose con un factor $1/w$.

Aquí surge un punto controversial, que debe ser discutido: como la onda reflejada puede dominar las bajas frecuencias de C_{app} ? , por que la onda reflejada no es la explicación de la atenuación $1/w$? En el caso que la reflexión domine las bajas frecuencias, quien es el responsable de la respuesta para las altas frecuencias?.

Desde el punto de vista eléctrico la inclusión de Z_0 es el responsable de la atenuación $1/w$. La corriente que circula por la rama de R_p , modela el flujo de salida y la rama C_{tot} la capacidad de almacenamiento.

En otras palabras el volumen de sangre liberado a bajas frecuencias es establecido por R_p . Desde el punto de vista eléctrico solo el término resistivo puede causar la respuesta $1/w$ en la función de transferencia. Aún más, si modificamos la C_{tot} a la mitad y consideramos Z_0 constante, observamos dos efectos: 1) C_{app} se reduce a la mitad a bajas

frecuencias (ΔC), 2) la frecuencia de corte se corre a la derecha (Δw).

Alteraciones sobre el árbol arterial modifican la forma de Z_{in} efectivamente. Como vimos anteriormente la variación de Z_{in} (llamado $Z(z)$ en la sección anterior) se debe a la onda reflejada. Por lo tanto se dice que la reflexión es la causante de esta respuesta de filtro pasabajo.

Impedancia terminal:

Finalmente consideramos el concepto de impedancia Terminal o impedancia de carga, la cual refleja precisamente la impedancia vista hacia las terminales de la arteria.

Como vimos en la sección anterior, al variar estas impedancias, influimos sobre el coeficiente de reflexión.

Esto es posible y de hecho se hace, ocluyendo arterias o dándole drogas vaso activas.

V. CONCLUSIONES

La compliance aparente, como función de transferencia, relaciona la presión de entrada con el volumen guardado en el sistema vascular. Vimos que la impedancia de entrada no depende únicamente de las propiedades de la arteria localmente sino también del resto del sistema arterial que le sigue.

Es decir que encontramos una fuerte analogía con las líneas de transmisión, que junto al concepto de C_{app} , nos permite tener un modelo mucho más exacto del sistema cardiovascular.

Resumiendo, los parámetros más importantes que aparecen en este trabajo y me permiten caracterizar al sistema son: el bucle Presión-Volumen (ventrículo), la impedancia de entrada (directamente relacionada con la presión y flujo en la arteria), onda reflejada, coeficiente de reflexión.

El estudio del modelo y el perfeccionamiento del mismo, permitirán saber con mucha anticipación problemas cardiovasculares que se puedan presentar en el futuro. Podrá ser una herramienta fundamental para realizar correctos tratamientos y prevenir infartos.

VI. AGRADECIMIENTOS

Se agradece profundamente la enorme ayuda y colaboración del Dr. Ing. Ricardo Armentano de la Univeridad de Favaloro (Buenos Aires), y a los Ingenieros Franco Simini y Daniel Geido por facilitar la información sobre este tema al autor.

REFERENCIAS

- [1] R. L. Armentano, D.Craiem, "The New Apparent Compliance Concept as a Simple Lumped Model". *Cardiovascular Engineering: An International Journal*, vol 3, No. 2, June 2003.
- [2] P. Segers, P. Verdonck, "Role of tapering in aortic wave reflection: hydraulic and mathematical model study", *Journal of Biomechanics* (2000)
- [3] G. Pontrelli, E. Rossoni, "*Numerical modeling of the pressure wave propagation in the arterial flow*". *International Journal for numerical methods in fluids* (2003).
- [4] R. L. Armentano, E.I. Cabrera Fischer "Biomecánica arterial: Fundamentos para su abordaje en la clínica Médica".
- [5] N. Stergiopulos, B. Westerhof, N. Westerhof, "Physical basis of pressure transfer from periphery to aorta: a model based study". *Biomedical Engineering Laboratory*.
- [6] S Ramo, J. R Whinnery, T. Van Duzer, "Field and waves in communications electronics". ISBN 65-19477
- [7] Wikipedia: www.wikipedia.com

Ianai Urwicz nació en Israel en el año 1982. Actualmente estudia Ingeniería Eléctrica opción Telecomunicaciones-Biomédica en Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República (Montevideo, Uruguay).